

Marian Soida

Astronomia Ogólna i Sferyczna

1 rok astronomii

<http://www.oa.uj.edu.pl/~soida/wyklady/A0iS/A0iS.pdf>

Literatura

Eugeniusz Rybka „Astronomia ogólna” PWN, Warszawa 1983 (wyd 7.)

Jan Mietelski „Astronomia w geografii” PWN, Warszawa 2005 (wyd. 4.)

Jerzy S. Stodótkiewicz „Astrofizyka ogólna z elementami geofizyki”, PWN, Warszawa 1978

Jerzy M. Kreiner „Ziemia i Wszechświat, astronomia nie tylko dla geografów”
Wyd. Naukowe UP, Kraków 2009

...

<http://www.wiw.pl/astronomia>

<http://pl.wikipedia.org>

<http://apod.oa.uj.edu.pl>

<http://www.nasa.gov>

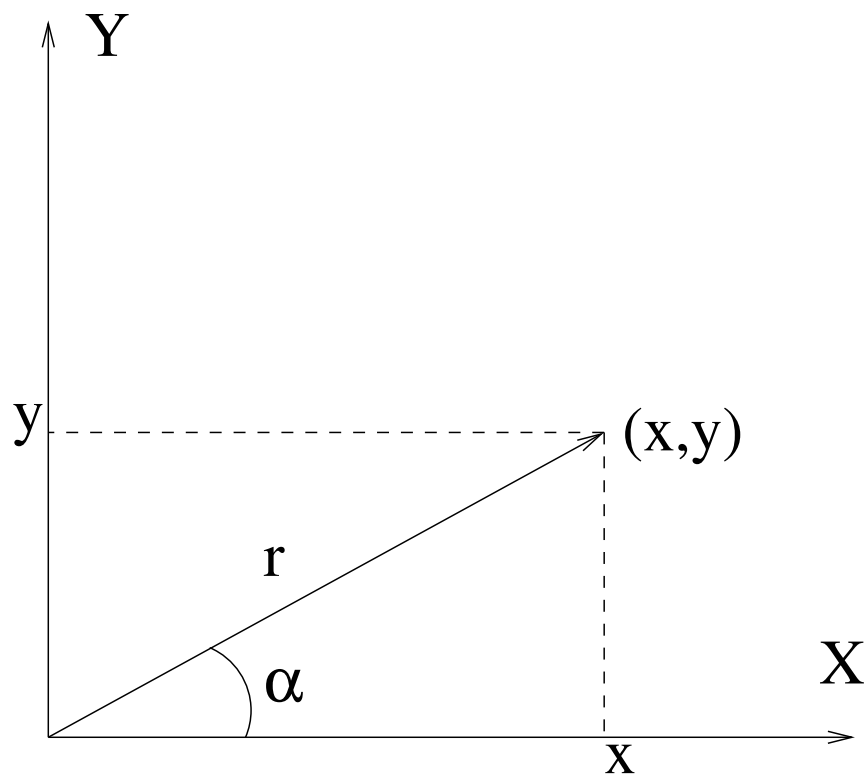
...

Spis treści

- układy współrzędnych
- geometria sferyczna
- układy współrzędnych astronomicznych
- fizyka układów z oddziaływaniem grawitacyjnym
- elementy mechaniki nieba

układy współrzędnych

– układ kartezjański i biegunowy na płaszczyźnie

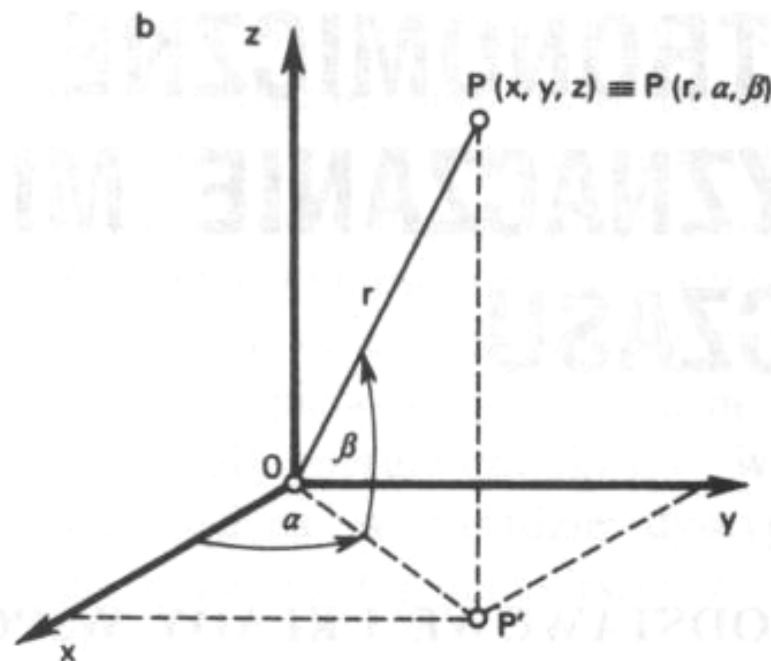
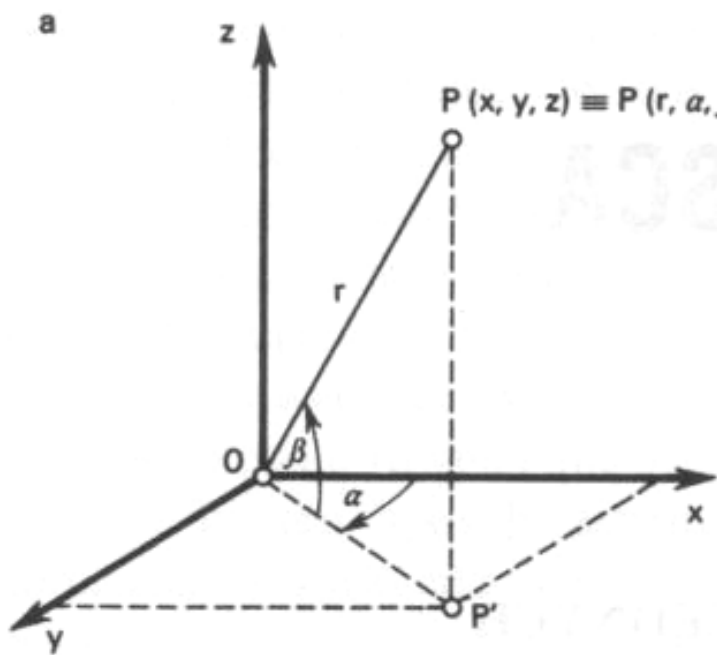


$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix}$$

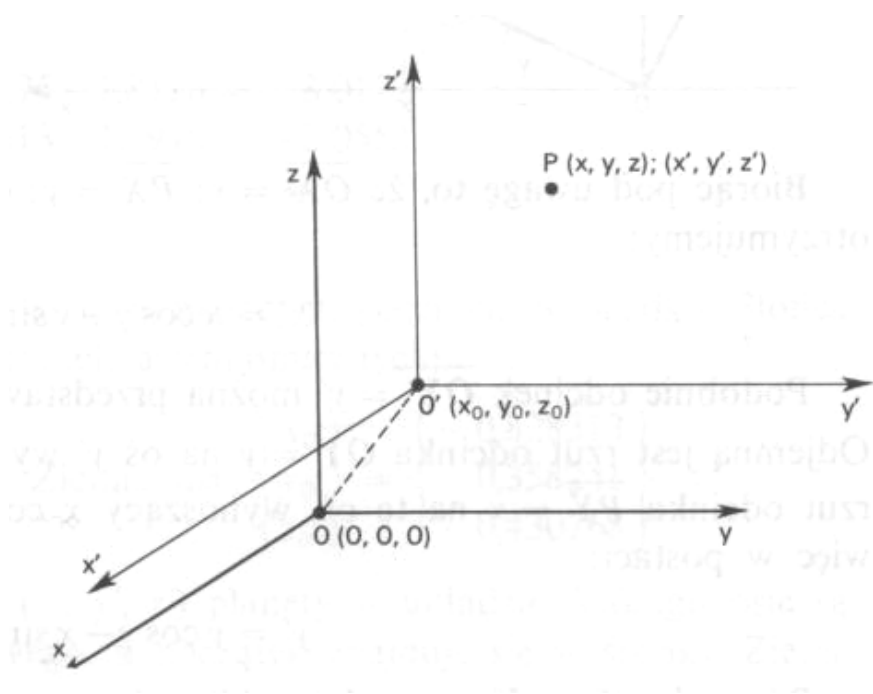
– układ kartezjański i sferyczny w 3D (prawo i lewoskretny)



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \beta \\ r \sin \alpha \cos \beta \\ r \sin \beta \end{pmatrix}$$

- transformacje układów współrzędnych

- przesunięcie

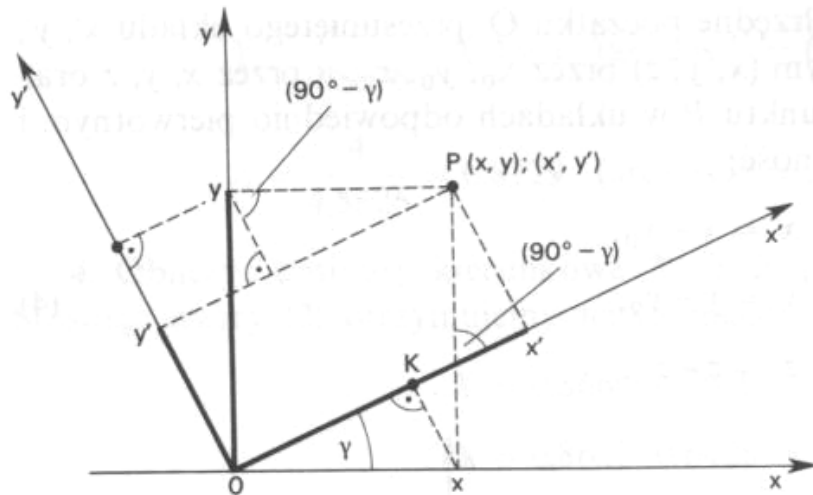


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

– obrót na płaszczyźnie

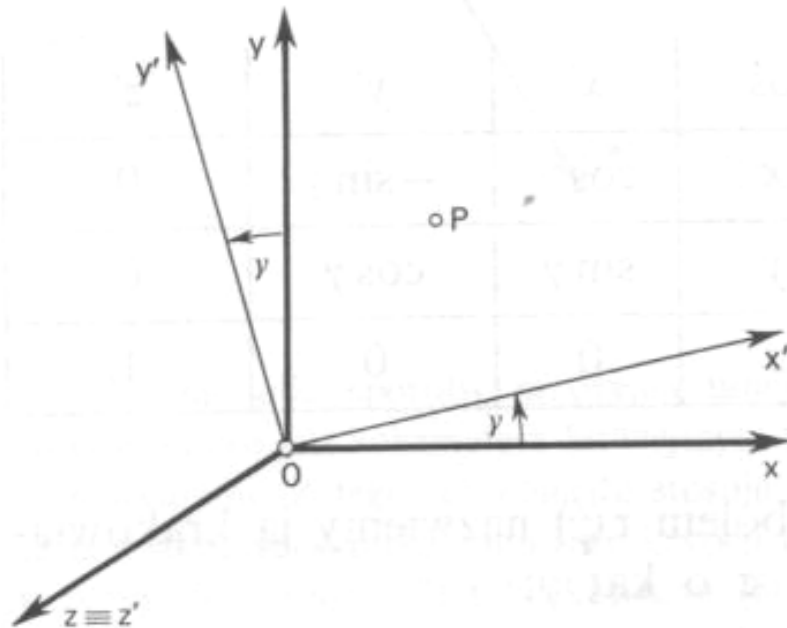


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \gamma + y \sin \gamma \\ -x \sin \gamma + y \cos \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

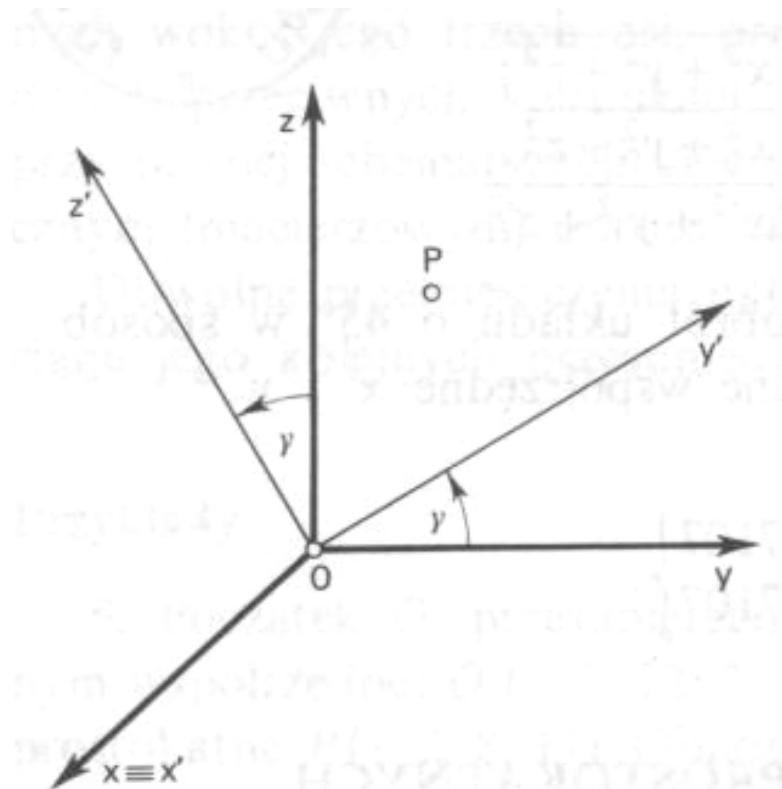
– obrót w przestrzeni – wokół osi Z



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \gamma + y \sin \gamma \\ -x \sin \gamma + y \cos \gamma \\ z \end{pmatrix}$$

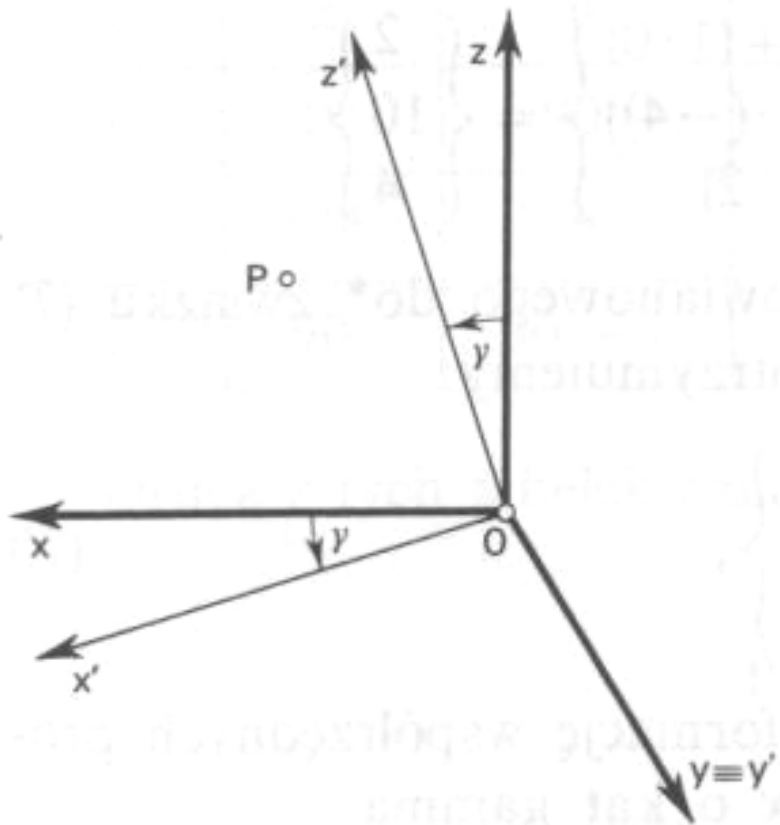
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

– wokół osi X



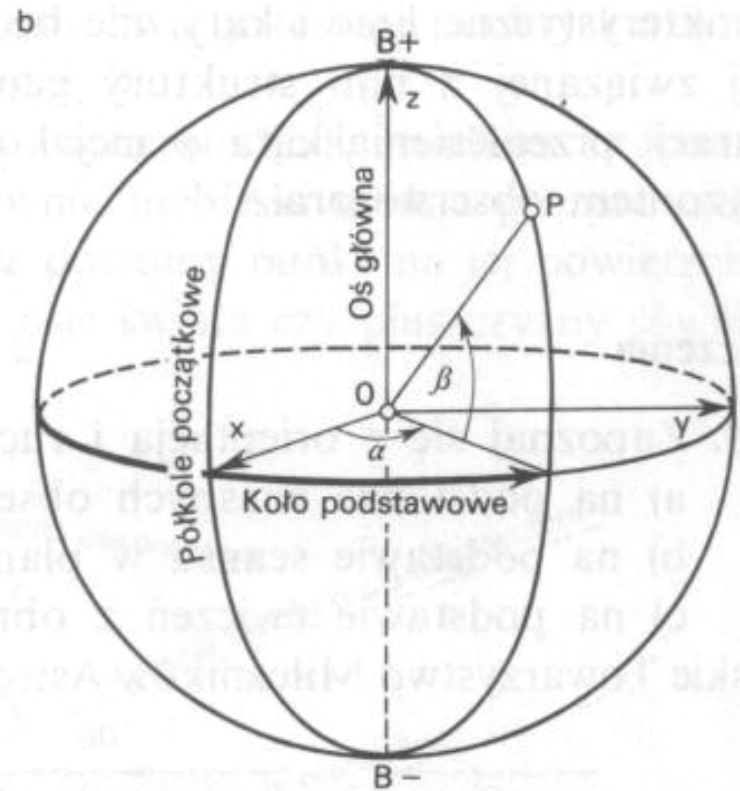
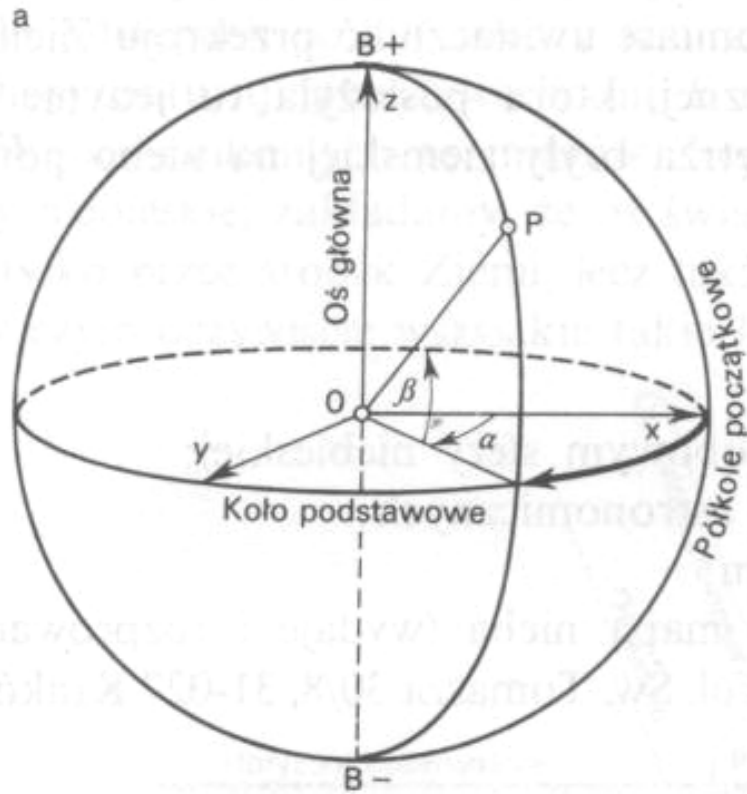
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

– wokół osi Y



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- współrzędne sferyczne



dla przypomnienia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \beta \\ r \sin \alpha \cos \beta \\ r \sin \beta \end{pmatrix}$$

i „w drugą stronę”

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

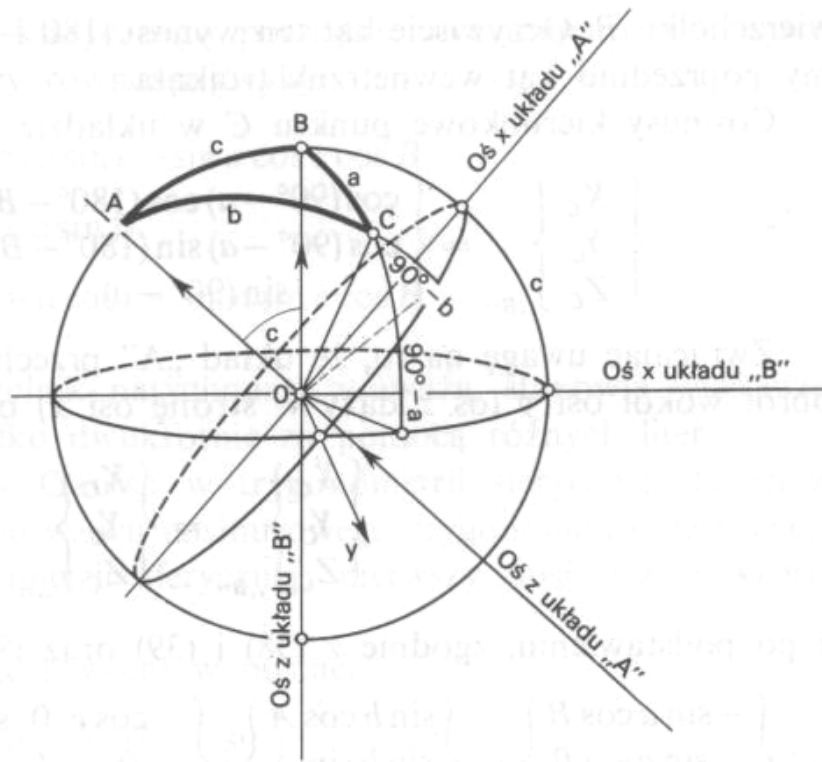
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

na sferze jednostkowej $r = 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

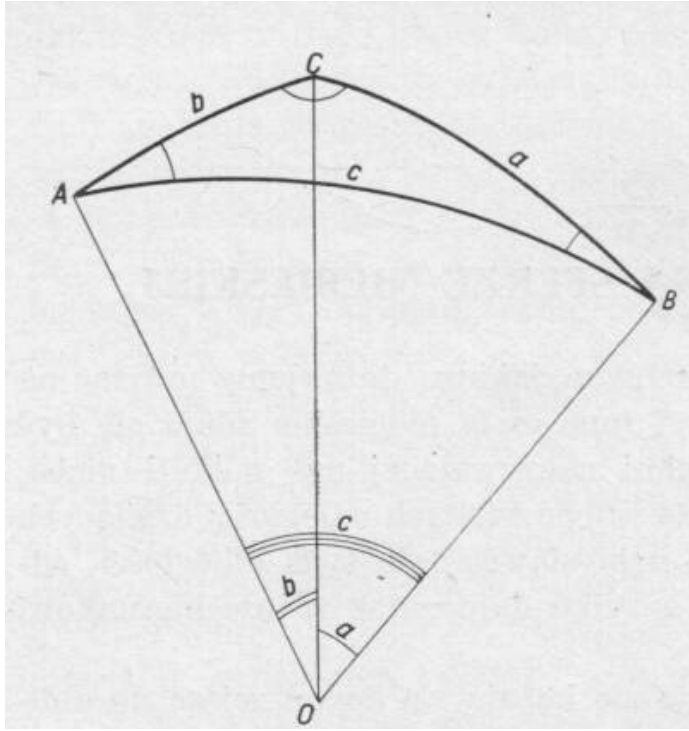
trójkąt sferyczny



koło wielkie – przecięcie sfery z płaszczyzną przechodzącą przez jej środek

koło małe – przecięcie sfery z inną płaszczyzną

odległość kątowna – kąt pomiędzy kierunkami (punktami na sferze) – długość łuku koła wielkiego przechodzącego przez te punkty



trójkąt sferyczny – figura wyznaczona przez trzy punkty na sferze (wierzchołki), wraz z łukami kół wielkich łączącymi te punkty (boki)

wielkość kątów i boków wyrażamy miarą kątową

suma kątów: $A + B + C > \pi$

eksces: $\varepsilon = A + B + C - \pi$

pole powierzchni trójkąta: $S = \varepsilon \cdot r^2$

– miary kątów

SI: 1 radian – kąt, który wycina z okręgu łuk równy promieniowi

– kąt pełny: 2π rad

– kąt prosty: $\pi/2$ rad

stopnie, minuty, sekundy (kątowne)

– kąt pełny: 360°

– kąt prosty: 90°

$$1^{\circ} = 60' = 3600''$$

godziny, minuty, sekundy (czasowe)

– kąt pełny: 24^{h}

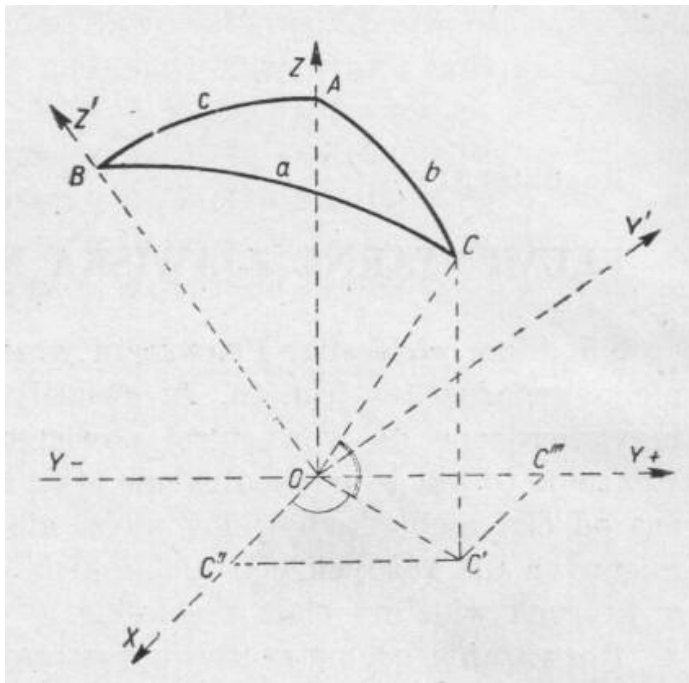
– kąt prosty: 6^{h}

$$1^{\text{h}} = 60^{\text{m}} = 3600^{\text{s}}$$

- $1^{\circ} = \pi/180 \text{ rad}$

- $1^{\text{h}} = 15^{\circ} = \pi/12 \text{ rad}$; np. $4^{\text{s}} = 1'$

– zależności pomiędzy bokami i kątami w trójkącie



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(A - 90^\circ) \cos(90^\circ - b) \\ \sin(A - 90^\circ) \cos(90^\circ - b) \\ \sin(90^\circ - b) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ - B) \cos(90^\circ - a) \\ \sin(90^\circ - B) \cos(90^\circ - a) \\ \sin(90^\circ - a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(A - 90^\circ) \cos(90^\circ - b) \\ \sin(A - 90^\circ) \cos(90^\circ - b) \\ \sin(90^\circ - b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin A \sin b \\ -\cos A \sin b \\ \cos b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ - B) \cos(90^\circ - a) \\ \sin(90^\circ - B) \cos(90^\circ - a) \\ \sin(90^\circ - a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin B \sin a \\ \cos B \sin a \\ \cos a \end{pmatrix}$$

ale

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & \sin c \\ 0 & -\sin c & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

więc:

$$\begin{pmatrix} \sin B \sin a \\ \cos B \sin a \\ \cos a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos c & \sin c \\ 0 & -\sin c & \cos c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin A \sin b \\ -\cos A \sin b \\ \cos b \end{pmatrix}$$

i po rozpisaniu:

$$\begin{aligned} \sin B \sin a &= \sin A \sin b \\ \cos B \sin a &= -\cos A \sin b \cos c + \cos b \sin c \\ \cos a &= \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c \end{aligned}$$

– wzór sinusów:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}$$

– wzór kosinusów:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

– wzór mieszany:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

zamieniając cyklicznie $(a, A) \rightarrow (b, B) \rightarrow (c, C) \rightarrow (a, A)$

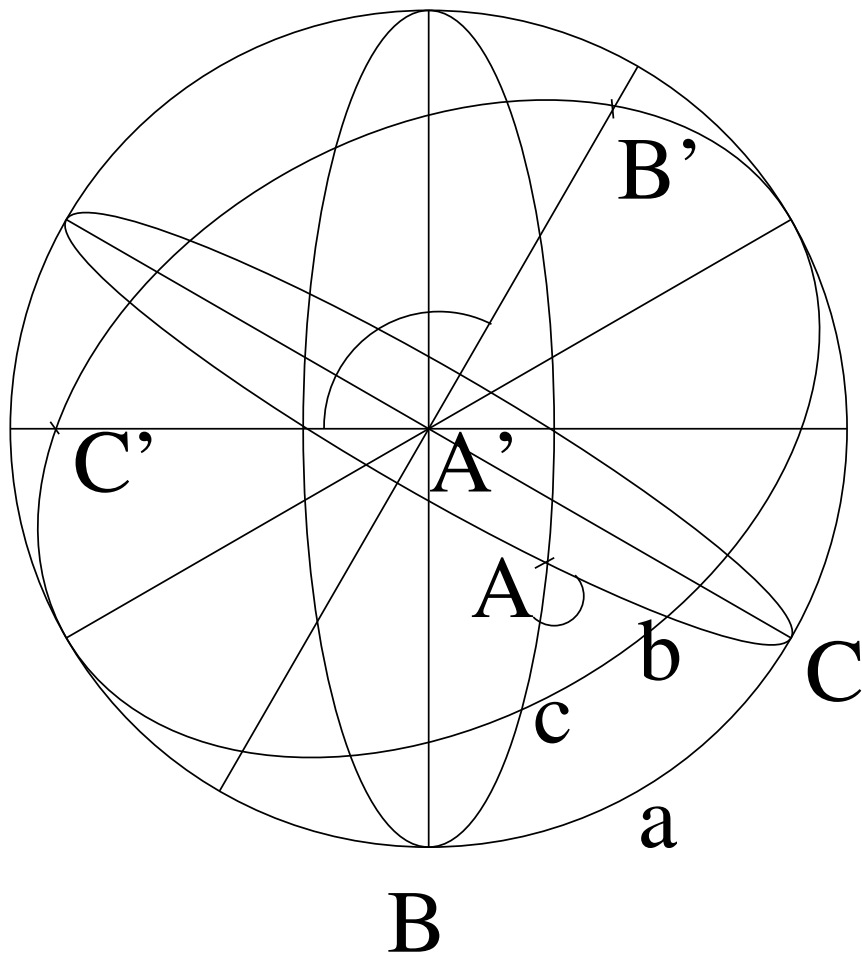
$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

trójkąt biegunowy (dualny, stowarzyszony)



$$\begin{aligned}
 A' &= 180^\circ - a, & a' &= 180^\circ - A \\
 B' &= 180^\circ - b, & b' &= 180^\circ - B \\
 C' &= 180^\circ - c, & c' &= 180^\circ - C
 \end{aligned}$$

– wzór kosinusów dla kątów:

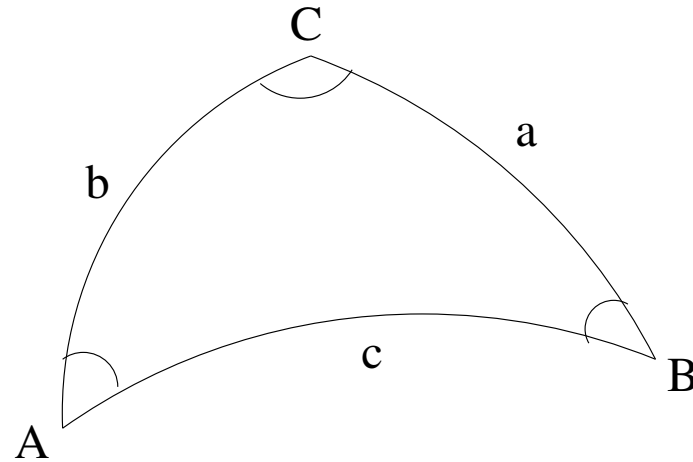
$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

i przestawienia cykliczne:

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$$

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

podsumowanie wzorów:



$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

trójkąt prostokątny

weźmy wzór kosinusów

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

i jeśli np. $A = 90^\circ$ to dostajemy twierdzenie Pitagorasa

$$\cos a = \cos b \cos c \quad (*)$$

po podzieleniu wzorów sinusów

$$\sin c = \sin a \sin C; \quad \sin b = \sin a \sin B \quad (*)$$

przez nie, dostaniemy

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C \quad (*)$$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B \quad (*)$$

weźmy wzór mieszany

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

to dla $A = 90^\circ$

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c$$

a $\sin a = \sin b / \sin B$ czyli

$$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B \quad (*)$$

weźmy wzór kosinusów

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

i podstawiając $\cos a = \cos b \cos c$ i $\sin a = \sin c / \sin C$

$$\cos c = \cos^2 b \cos c + \sin c \sin b \cos C / \sin C$$

czyli

$$\cos c \sin^2 b = \sin c \sin b \cos C / \sin C$$

i w końcu (gdy $\sin b \neq 0$)

$$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C \quad (*)$$

tzw. wzory tangensów;

ze wzoru kosinusów dla kątów

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

dla $A = 90^\circ$ mamy

$$\cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a$$

czyli tzw. wzór kotangensów

$$\cos a = \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \quad (*)$$

i jeszcze

$$\cos B = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} a = \frac{\sin c \cos a}{\cos c \sin a}$$

podstawiając $\sin c$ i $\cos a$

$$\cos B = \frac{\sin a \sin C \cos b \cos c}{\cos c \sin a}$$

czyli

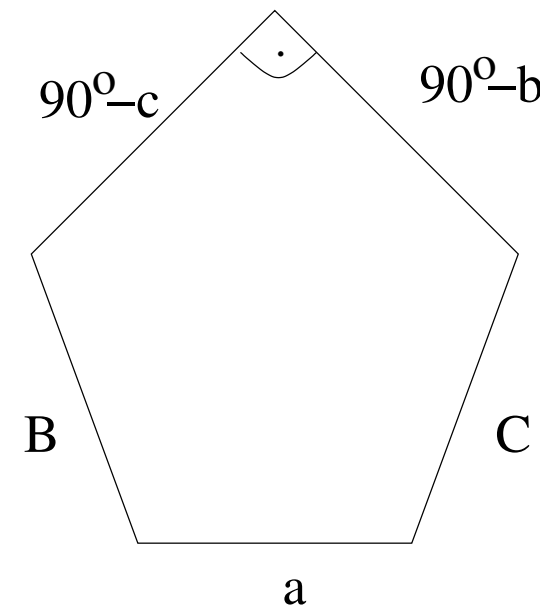
$$\cos B = \cos b \sin C \quad (*)$$

i analogicznie

$$\cos C = \cos c \sin B \quad (*)$$

– reguła mnemotechniczna dla trójkąta prostokątnego

kosinus dowolnego boku
= iloczyn sinusów boków nieprzyległych
= kotangensów boków przyległych



- związek trygonometrii sferycznej z płaską

dla małych wartości argumentu

$$\sin x \simeq x$$

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$$

– np. tw. Pitagorasa: $\cos a = \cos b \cos c$

$$1 - \frac{a^2}{2} \simeq \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) \simeq 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2}$$

i w końcu

$$a^2 = b^2 + c^2$$

– wzór kosinusów: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

$$1 - \frac{a^2}{2} \simeq \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc \cos A \simeq 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} + bc \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

– wzór sinusów: $\sin a / \sin A = \sin b / \sin B$

$$\frac{a}{\sin A} \simeq \frac{b}{\sin B}$$

a w trójkącie prostokątnym ($A = 90^\circ$)

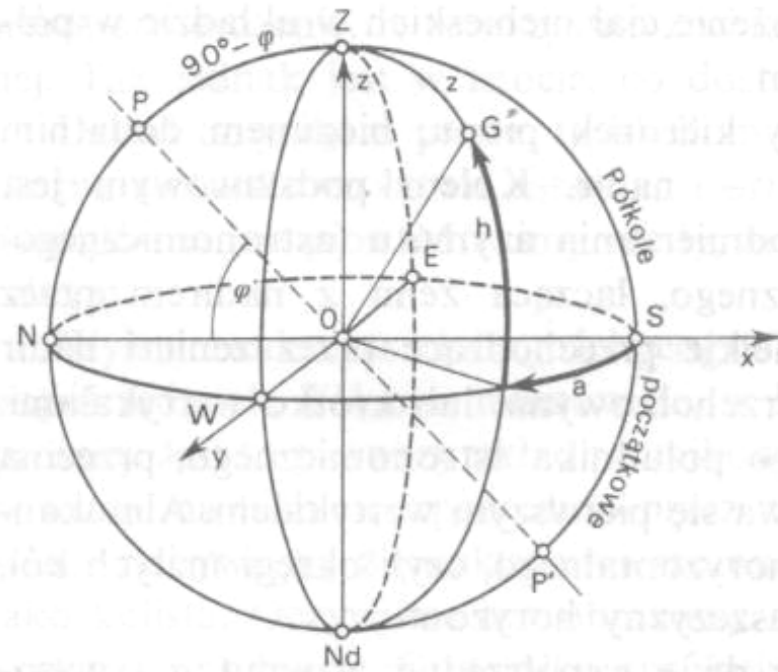
$$\sin B = \frac{b}{a}$$

astronomiczne układy współrzędnych

- układ horyzontalny
 - płaszczyzna horyzontu – płaszczyzna prostopadła do kierunku pionu (siły ciężkości) w miejscu obserwacji, przechodząca przez środek sfery niebieskiej
 - horyzont – koło wielkie, wzdłuż którego płaszczyzna horyzontu przecina się ze sferą niebieską (nie jest tożsamy z widnokregiem!)
 - zenit (Z) i nadir (Nd) – punkty przecięcia lokalnego pionu ze sferą niebieską, zenit zawsze jest nad horyzontem

- oś świata – oś obrotu sfery niebieskiej
- bieguny świata (północny P i południowy P') – punkty przecięcia osi świata ze sferą niebieską
- koło wierzchołkowe – każde koło wielkie, przechodzące przez zenit (a więc również przez nadir)
- południk miejscowy – koło wierzchołkowe, przechodzące przez bieguny, przecina się z horyzontem w punktach N i S (północnym i południowym)

- pierwszy wertykał – koło wierzchołkowe o pałszczyźnie prostopadłej do płaszczyny południka lokalnego, przecina się z horyzontem w punktach E i W (wschodu i zachodu)
- E, S, W i N – punkty kardynalne
- almukantar – koło małe o pałszczyźnie równoległej do płaszczyny horyzontu



– wysokość nad horyzontem h
 – kąt między półprostą łączącą
 środek sfery niebieskiej z gwiazdą
 a płaszczyzną horyzontu,
 mierzy się ją od horyzontu ku zenitowi, czyli

$0^\circ < h \leq +90^\circ$ nad horyzontem

$-90^\circ \leq h < 0^\circ$ pod horyzontem

– odległość zenitalna $z = 90^\circ - h$
 mierzy się ją od zenitu ku nadirowi

$0^\circ \leq z \leq +180^\circ$

– azymut A – kąt dwuścienny między płaszczyzną południka miejscowego a płaszczyzną koła wierzchołkowego przechodzącego przez gwiazdę,

mierzy się go wzdłuż horyzontu od punktu S w kierunku zachodnim i wtedy

$$0^\circ \leq A < +360^\circ$$

albo od punktu S w obu kierunkach i wtedy:

$$0^\circ < A < +180^\circ \text{ na zachód}$$

$$-180^\circ < A < 0^\circ \text{ na wschód}$$

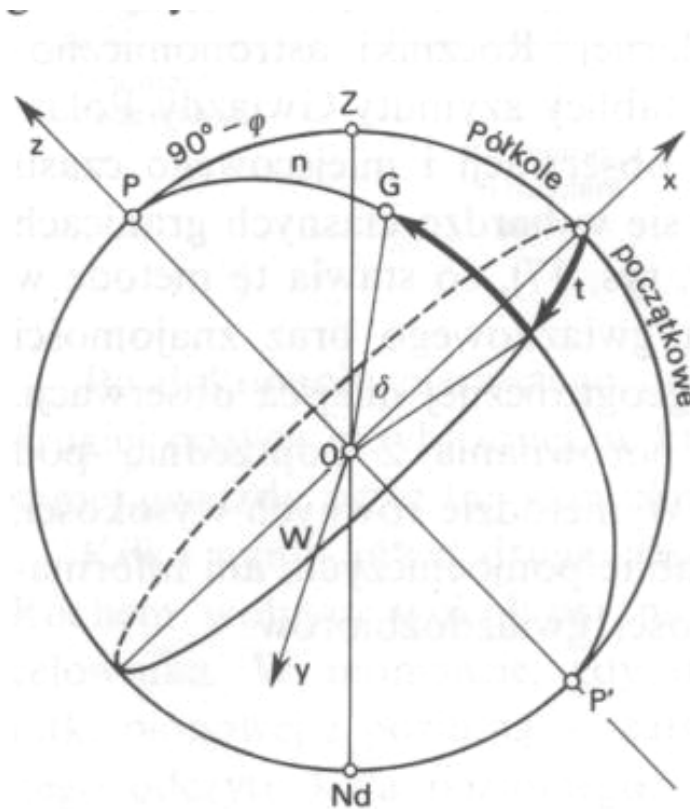
azymut zenitu i nadiru jest nieokreślony.

(Uwaga: w geodezji azymut mierzy się od punktu N)

- układ równikowy I (godzinny)

- równik niebieski – koło wielkie, przecięcie sfery niebieskiej płaszczyzną prostopadłą do osi świata (rzut na sferę niebieską równika ziemskiego)
- równoleżnik niebieski – koło małe o płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny równika niebieskiego
- szerokość geograficzna – wysokość bieguna północnego w miejscu obserwacji – kąt między kierunkiem ku zenitowi a płaszczyzną równika

- koło godzinne – każde koło wielkie, przechodzące przez bieguny (południk miejscowy jest też kołem godzinnym)



- deklinacja δ – kąt między półprostą łączącą środek sfery niebieskiej z gwiazdą a płaszczyzną równika niebieskiego, mierzymy ją od równika ku biegunom, przy czym:

$0^\circ < \delta < +90^\circ$ na północ

$-90^\circ < \delta < 0^\circ$ na południe

deklinacja nie zmienia się wraz z rotacją Ziemi,

– kąt godzinny t – kąt dwuścienny między płaszczyzną południka miejscowego a płaszczyzną koła godzinnego przechodzącego przez obiekt,

mierzy się go w kierunku wstecznym, poczynając od połówki południka miejscowego przechodzącej przez zenit

$$0^{\text{h}} \leq t < 24^{\text{h}}$$

kąty godzinne biegunów nie są określone.

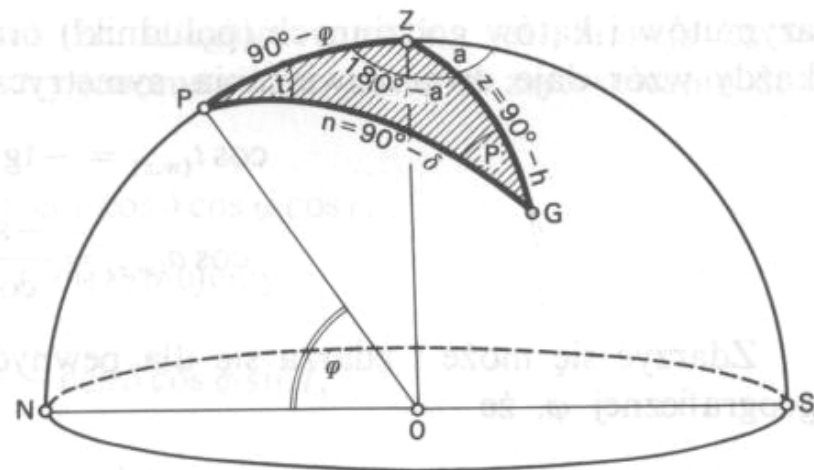
kąt godzinny obiektu ulega zmianie (rośnie) w ciągu doby.

trójkąt paralaktyczny

– związki pomiędzy współrzędnymi w układach horyzontalnym i równikowym godzinnym

wierzchołkami są

- zenit
- biegun (północny)
- obiekt



• współrzędne azymutalne \rightarrow równikowe $(A, z) \rightarrow (t, \delta)$:

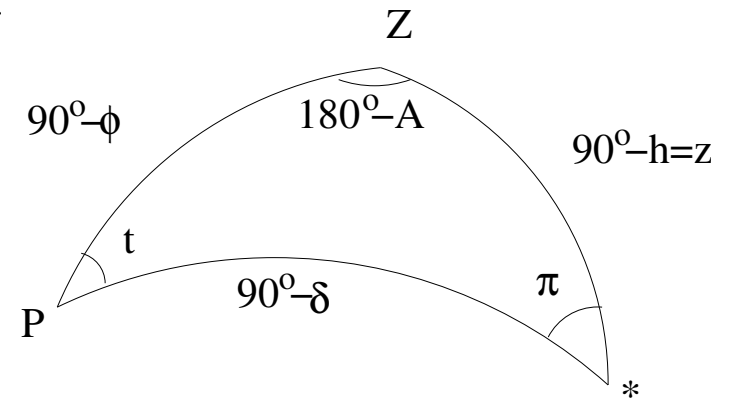
$$\sin \delta = \sin \phi \cos z - \cos \phi \sin z \cos A$$

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta}$$

$$\cos z = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos t$$

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta}$$

$$\sin t = \sin z \sin A / \cos \delta$$



- współrzędne równikowe \rightarrow azymutalne $(t, \delta) \rightarrow (A, z)$:

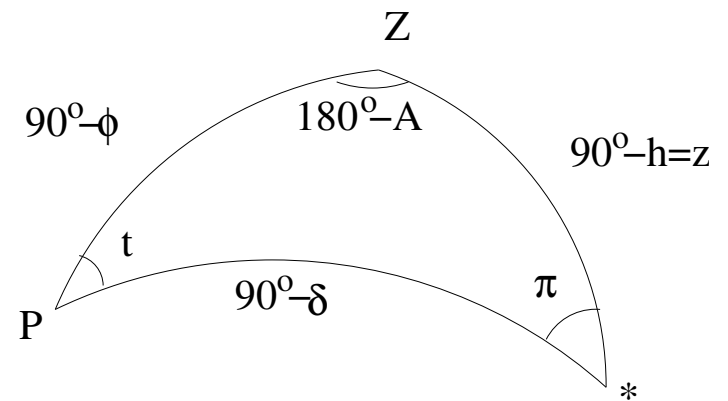
$$\cos z = \sin \delta \sin \phi + \cos \delta \cos \phi \cos t$$

$$\sin z = \sqrt{1 - \cos^2 z}$$

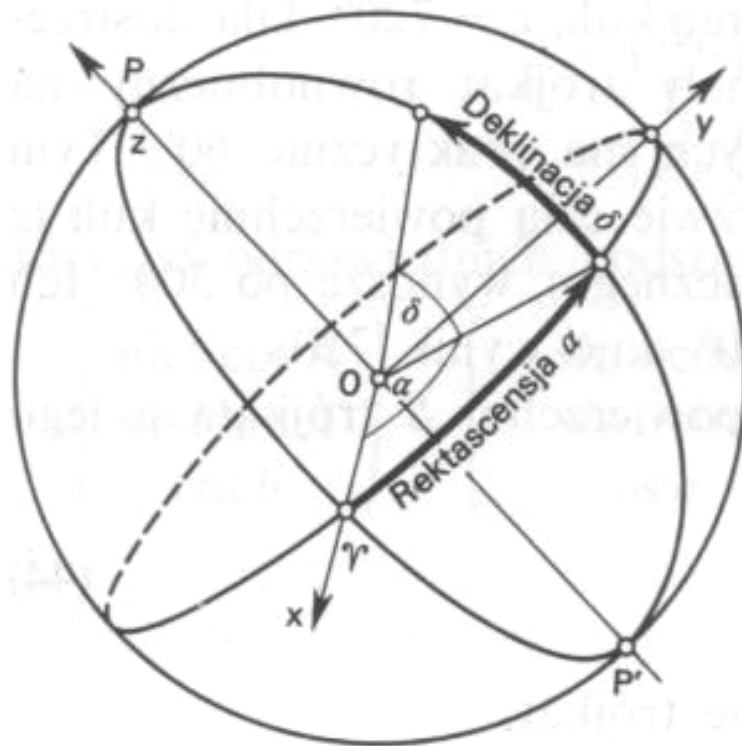
$$\sin A = \cos \delta \sin t / \sin z$$

$$\sin \delta = \sin \phi \cos z - \cos \phi \sin z \cos A$$

$$\cos A = \frac{\sin \phi \cos z - \sin \delta}{\cos \phi \sin z}$$



- układ równikowy II (równonocny)



- deklinacja δ – określona tak samo, jak w układzie godzinnym
 - rektascensja α – kąt dwuścienny między płaszczyzną koła godzinnego przechodzącego przez punkt równonocy wiosennej (Barana) a płaszczyzną koła godzinnego przechodzącego przez dany obiekt, mierzy się ją od punktu Barana wzdłuż równika w kierunku prostym
- $$0^h \leq \alpha < 24^h$$

rektascencja biegunów nie jest określona.

w tym układzie współrzędne nie ulegają zmianie wskutek rotacji Ziemi,

wskutek zjawiska precesji punkt Υ przesuwa się wzdłuż ekliptyki ruchem wstecznym o ok. $50''3/\text{rok}$

– znaki Zodiaku nie pokrywają się już z odpowiadającymi im gwiazdozbiorami (np. punkt Υ znajduje się w gwiazdozbiore Ryb)

– współrzędne należy podawać wraz z epoką, np. teraz podaje się je dla epoki 2000.0 (czyli takie, jakie były o północy 1.I.2000)

- układ ekliptyczny

– ekliptyka – koło wielkie, po którym przemieszcza się Słońce w swym ruchu rocznym

płaszczyzna ekliptyki jest nachylona do płaszczyzny równika pod kątem $\varepsilon = 23^{\circ}27'$

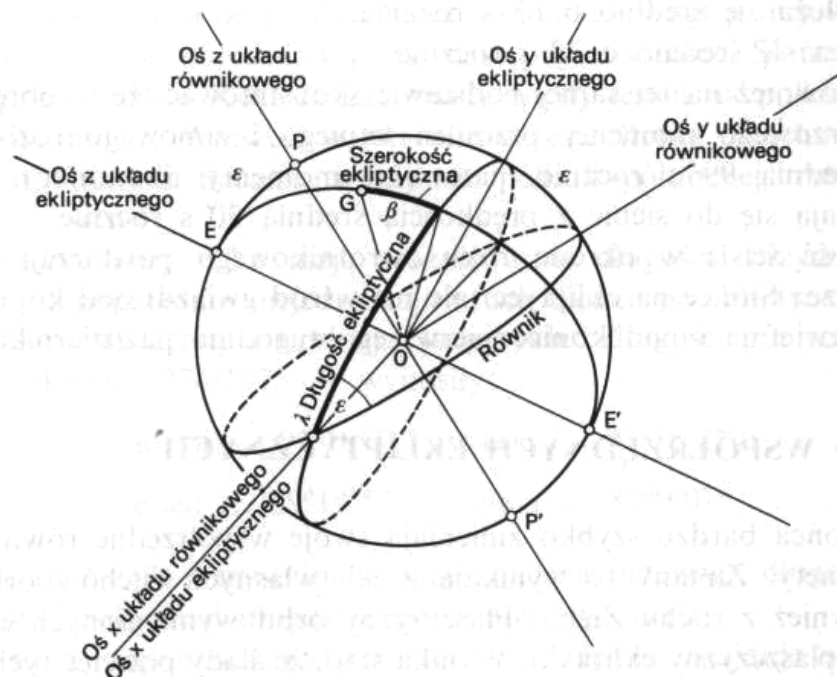
Słońce porusza się po niej ruchem wstecznym

– punkty równonocy to miejsca przecięcia ekliptyki z równikiem niebieskim

Υ (punkt Barana, punkt równonocy wiosennej) – punkt, w którym δ_{\odot} zmienia się z ujemnej na dodatnią (ok. 21.III), wtedy $\delta_{\odot} = 0^{\circ}$, $\alpha_{\odot} = 0^h$

– zwrotniki – równoleżniki o deklinacji $+\varepsilon$ (zwrotnik Raka) i $-\varepsilon$ (zwrotnik Koziorożca)

jest przydatny do badania położenia Słońca i planet



- ekliptyka jest jego płaszczyzną podstawową
- bieguny ekliptyki (północny E i południowy E' – punkty przecięcia sfery niebieskiej z prostą prostopadłą do ekliptyki, przechodzącą przez środek sfery
- szerokość ekliptyczna β – kąt między półprostą łączącą środek sfery niebieskiej z gwiazdą a płaszczyzną ekliptyki, mierzymy ją od płaszczyzny ekliptyki ku jej biegunom

$$-90^\circ \leq \beta \leq +90^\circ$$

- długość ekliptyczna λ – kąt dwuścienny między płaszczyzną koła wielkiego przechodzącego przez bieguny ekliptyki i punkt

Υ a płaszczyzną koła wielkiego przechodzącego przez bieguny ekliptyki i dany obiekt,

mierzy się go od punktu Υ wzdłuż ekliptyki w kierunku prostym

$$0^\circ \leq \lambda < 360^\circ$$

długość biegunów ekliptyki nie jest określona

długość i szerokość ekliptyczna nie zmieniają się wskutek rotacji Ziemi

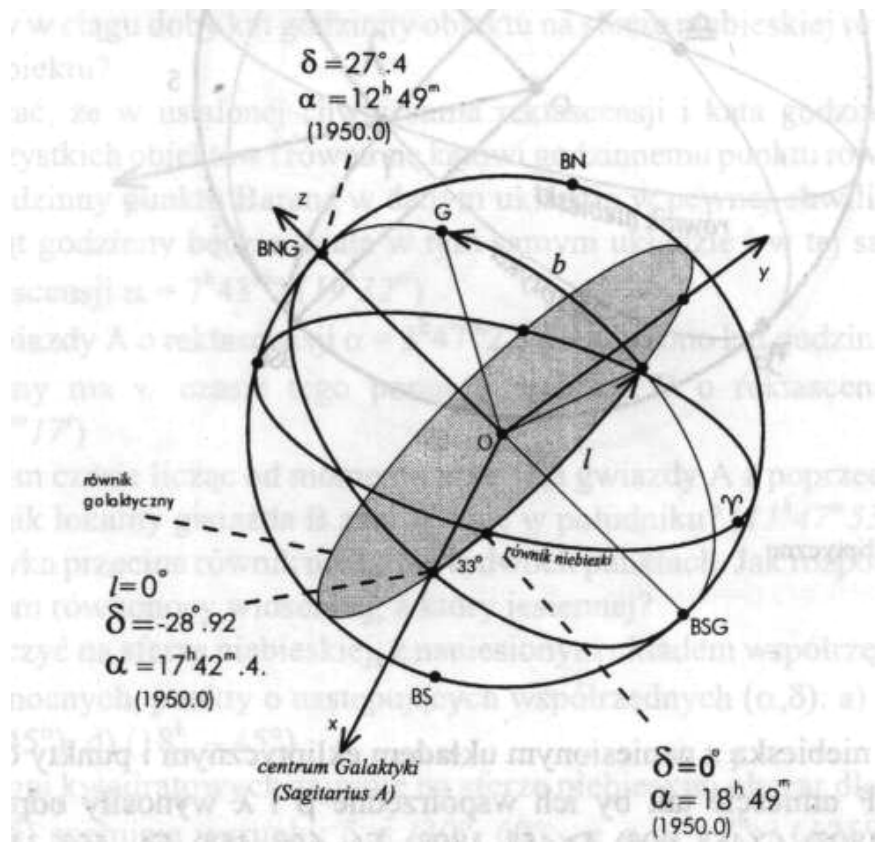
- układ galaktyczny

- Równik galaktyczny – wyznaczono na podstawie obserwacji wodoru międzygwiazdowego (linia 21 cm – 1420 MHz)

- Bieguny Galaktyki (północny BGN i południowy BGS) – punkty przecięcia sfery niebieskiej z prostą prostopadłą do równika galaktycznego, przechodzącą przez środek sfery. W układzie równikowym: $\alpha_{\text{BGN}} = 12^{\text{h}}51^{\text{m}}$; $\delta_{\text{BGN}} = 27^{\circ}08'$ (1950) – gwiazdozbiór Warkocza Bereniki

- Centrum Galaktyki – utożsamia się je z radioźródłem Sgr A: $\alpha_{\text{GC}} = 17^{\text{h}}46^{\text{m}}$; $\delta_{\text{GC}} = 28^{\circ}56'$ (1950)

przydatny np. do prezentacji obserwacji naszej Galaktyki, obiektów pozagalaktycznych



- Szerokość galaktyczna b – kąt między półprostą łączącą środek sfery niebieskiej z gwiazdą a płaszczyzną Galaktyki, mierzymy ją od płaszczyzny Galaktyki ku jej biegunom, przy czym:
 - $0^\circ < b \leq +90^\circ$ na północnej półkuli galaktycznej
 - $-90^\circ \leq b < 0^\circ$ na południowej półkuli galaktycznej

- Długość galaktyczna l – kąt dwuścienny między płaszczyzną koła wielkiego przechodzącego przez bieguny Galaktyki i jej centrum a płaszczyzną koła wielkiego przechodzącego przez biegu-

ny Galaktyki i dany obiekt, mierzy się ją od centrum Galaktyki wzdłuż równika galaktycznego w kierunku prostym

$$0^\circ \leq l < 360^\circ$$

Długość galaktyczna biegunów galaktyki nie jest określona.

– do 1960 roku współrzędne galaktyczne (l_I, b_I) , definiowane przez biegun północny $\alpha_{1900} = 12^{\text{h}}40^{\text{m}}$; $\delta_{1900} = +28^\circ$, i długość galaktyczną liczono od przecięcia się płaszczyzny Galaktyki z równikiem w punkcie $\alpha_{1900} = 18^{\text{h}}40^{\text{m}}$; $\delta_{1900} = 0^\circ$

- współrzędne równikowe \rightarrow ekliptyczne $(\alpha, \delta) \rightarrow (\lambda, \beta)$:

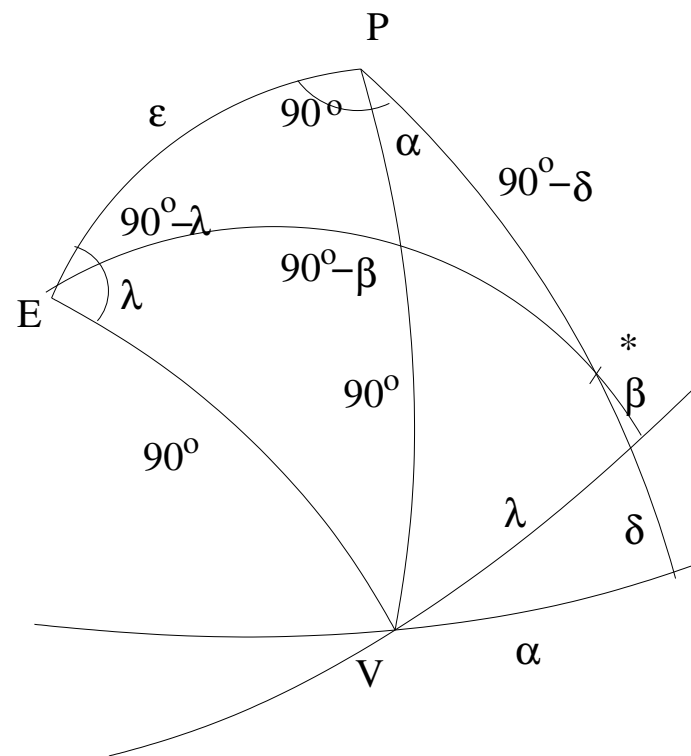
$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda$$

$$\sin \lambda = \frac{\sin \delta - \sin \beta \cos \varepsilon}{\cos \beta \sin \varepsilon}$$

$$\cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta / \cos \beta$$



- współrzędne ekliptyczne \rightarrow równikowe $(\lambda, \beta) \rightarrow (\alpha, \delta)$:

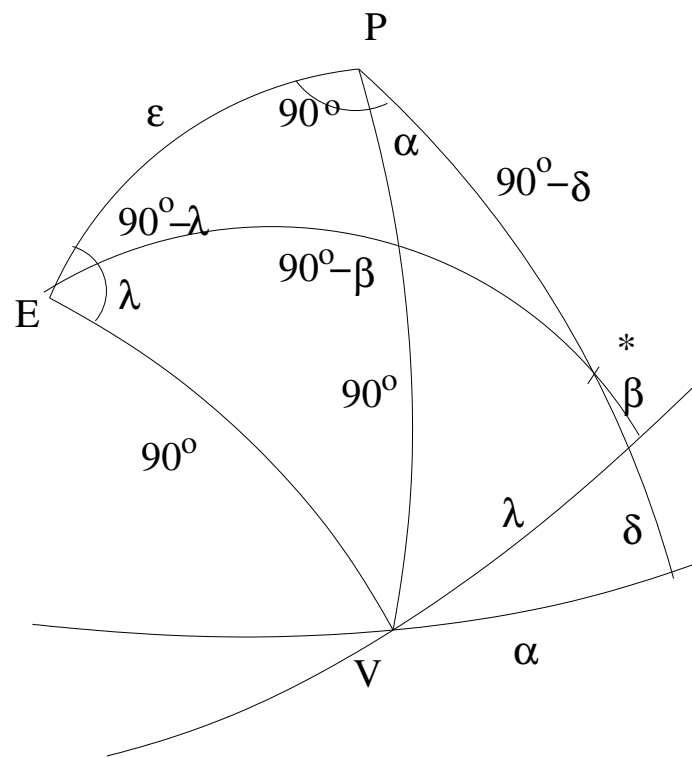
$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda$$

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta}$$

$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \delta \cos \varepsilon - \sin \beta}{\cos \delta \sin \varepsilon}$$

$$\cos \alpha = \cos \lambda \cos \beta / \cos \delta$$



precesja

- biegun północny obiega północny biegun ekliptyczny z okresem ok. 26 000 lat
- punkt barana cofa się po ekliptyce (równiku) o ok. $50''3/\text{rok}$
- uproszczenia:
 - biegun ekliptyczny pozostaje w spoczynku ($\beta = \text{const}$)
 - nachylenie płaszczyzny ekliptyki nie zmienia się ($\varepsilon = \text{const}$)

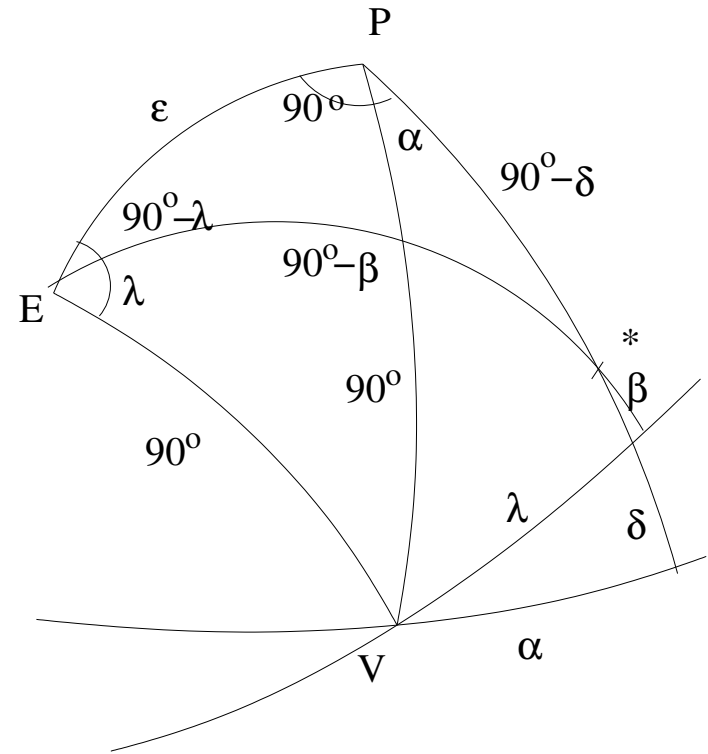
$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda$$

$$\frac{\cos \lambda}{\cos \delta} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha$$

$$\cos \delta \frac{d\delta}{dt} = \cos \beta \sin \varepsilon \cos \lambda \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \sin \varepsilon \cos \alpha \frac{d\lambda}{dt}$$



$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha$$

$$0 = \cos \delta \frac{d\delta}{dt} \cos \varepsilon + \sin \delta \frac{d\delta}{dt} \sin \varepsilon \sin \alpha - \cos \delta \sin \varepsilon \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\cos \delta \sin \varepsilon \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = (\cos \delta \cos \varepsilon + \sin \delta \sin \varepsilon \sin \alpha) \frac{d\delta}{dt}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \frac{d\lambda}{dt}$$

- roczna zmiana współrzędnych:

$$\Delta \alpha \simeq 50''3 \cdot (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \sin \alpha \operatorname{tg} \delta)$$

$$\Delta \delta \simeq 50''3 \cdot \sin \varepsilon \cos \alpha$$

- wiekowe zmiany:

$$p = 50''2564 + 0''000222(t - 1900)$$

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 8''26 - 0''4684(t - 1900)$$

- wschody i zachody obiektów

$$\sin \delta = \sin \phi \cos z - \cos \phi \sin z \cos A$$

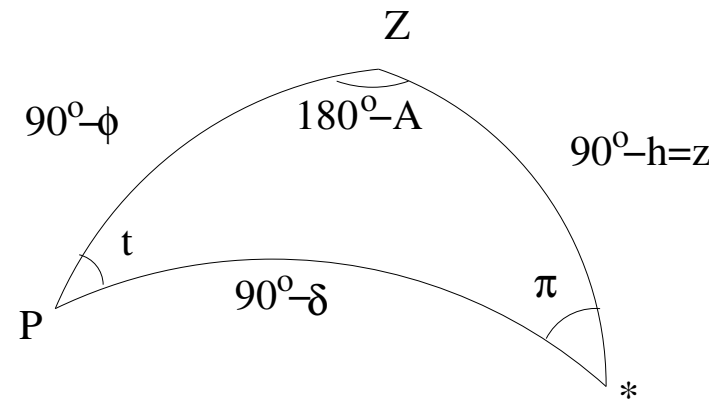
$$\cos t = \frac{\cos z - \sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta}$$

$$\sin t = \sin z \sin A / \cos \delta$$

$$\cos z = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos t$$

$$\sin A = \cos \delta \sin t / \sin z$$

$$\cos A = \frac{\sin \phi \cos z - \sin \delta}{\cos \phi \sin z}$$



wschód i zachód obiektu: $z = 90^\circ$

$$\begin{aligned}\sin \delta &= -\cos \phi \cos A \\ \cos t &= -\frac{\sin \phi \sin \delta}{\cos \phi \cos \delta} \\ \sin t &= \sin A / \cos \delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos t \\ \sin A &= \cos \delta \sin t \\ \cos A &= -\frac{\sin \delta}{\cos \phi}\end{aligned}$$

redukując powtarzające się wzory, pozostaje:

$$\begin{aligned}\cos A &= -\frac{\sin \delta}{\cos \phi} \\ \cos t &= -\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta \\ \sin A &= \cos \delta \sin t\end{aligned}$$

dwa pierwsze, żeby istniało A lub t powinny spełniać:

$$-1 \leq -\frac{\sin \delta}{\cos \phi} \leq 1$$

$$-1 \leq -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \phi \leq 1$$

czyli

$$\sin(\phi - 90^\circ) \leq \sin \delta \leq \sin(90^\circ - \phi)$$

$$\operatorname{tg}(\phi - 90^\circ) \leq \operatorname{tg} \delta \leq \operatorname{tg}(90^\circ - \phi)$$

obie funkcje \sin i tg są rosnące ($-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$), to:

$$\phi - 90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ - \phi$$

np. dla $\phi = 50^\circ$ mamy: $-40^\circ \leq \delta \leq 40^\circ$ – obiekt wschodzi i zachodzi, $\delta > 40$ – nie zachodzi, $\delta < -40^\circ$ – nie wschodzi

jeśli obiekt wschodzi (zachodzi) możemy obliczyć azymut, lub kąt godzinny wschodu (zachodu):

$$\cos A = -\sin \delta / \cos \phi$$

$$\cos t = -\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta$$

$$\sin A = \cos \delta \sin t$$

i stąd

$$A = \pm \arccos(-\sin \delta / \cos \phi)$$

$$t = \pm \arccos(-\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta)$$

trzecie równanie wiąże znaki A i t , bo $\cos \delta \geq 0$

np.: czas od wschodu do zachodu obiektu: $T_\delta = 2 \arccos(-\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta)$
(w jednostkach czasu gwiazdowego!).

- refrakcja atmosferyczna a wschód i zachód Słońca

refrakcja przy horyzoncie wynosi $r_H \simeq 35'$, czyli obiekt zachodzi (wschodzi) nie gdy $z = 90^\circ$, ale $z \simeq 90^\circ 35'$

– można albo rozwiązywać „pełne” równania trójkąta paralaktycznego, albo skorzystać z „poprawki” na refrakcję

$$\cos z = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos t$$

różniczkując względem t

$$-\sin z \frac{dz}{dt} = -\cos \phi \cos \delta \sin t$$

i w pobliżu horyzontu ($\sin z \simeq 1$)

$$\Delta t \simeq \frac{\Delta z}{\cos \phi \cos \delta \sin t}$$

np. dla $\phi = 50^\circ$, $\delta = 0^\circ$ i $\Delta z = 35'$

$$\Delta t \simeq 3^m 38^s$$

dla Słońca (i np. Księżycy) współrzędne podaje się dla środka tarczy, a np. zachód Słońca to moment gdy cała tarcza chowa się pod horyzont

po uwzględnieniu refrakcji daje to $h_\odot \simeq -35' - 16' = -51'$ i np. w momencie równonocy ($\delta_\odot = 0^\circ$) $\Delta t_\odot \simeq 51' / \cos(\phi)$,

a długość dnia w Krakowie – $12^h 10^m 35^s$ gwiazdowych ($12^h 8^m 35^s$ średnich słonecznych)

- zmierzch i świt

zmierzch – trwa od zachodu Słońca do momentu, gdy środek jego tarczy osiągnie wysokość h_{\odot}

świt – trwa od momentu, gdy wysokość Słońca wynosi h_{\odot} do jego wschodu

h_{\odot}	świt/zmierzch
-6°	cywilny
-12°	żeglarski
-18°	astronomiczny

i znowu, żeby dokładnie wyliczyć czas trwania zmierzchu (świtu) można skorzystać ze wzoru kosinusów

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \delta \sin \phi}{\cos \delta \cos \phi}$$

podstawić za h odpowiednią wysokość i odjąć od momentu zachodu (wschodu)

można użyć przybliżonego wzoru

$$\Delta t \simeq \frac{\Delta z}{\cos \phi \cos \delta \sin t}$$

(błąd ok. 5% dla zmierzchu/świtu astronomicznego)

Mietelski (str. 103, wzór 89) podaje:

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{\cos \delta \cos \phi}$$

pisząc, że $\sin t$ jest bliskie jedności – ale tylko poza bezpośrednią bliskością nocy polarnej i sezonu białych nocy

można też wyliczyć $\sin t$ w momencie zachodu:

$$\cos t = -\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta$$

$$\begin{aligned}\sin t &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} = \pm \frac{\sqrt{\cos^2 \phi \cos^2 \delta - \sin^2 \phi \sin^2 \delta}}{\cos \phi \cos \delta} \\ &= \pm \frac{\sqrt{(\cos \phi \cos \delta - \sin \phi \sin \delta)(\cos \phi \cos \delta + \sin \phi \sin \delta)}}{\cos \phi \cos \delta} \\ &= \pm \frac{\sqrt{\cos(\phi + \delta) \cos(\phi - \delta)}}{\cos \phi \cos \delta}\end{aligned}$$

i w końcu

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{\cos \phi \cos \delta \sin t} = \frac{\pm \Delta z}{\sqrt{\cos(\phi + \delta) \cos(\phi - \delta) \cos \phi \cos \delta}}$$

- czas gwiazdowy

czasem gwiazdowym (lokalnym) nazywamy kąt godzinny punktu Barana

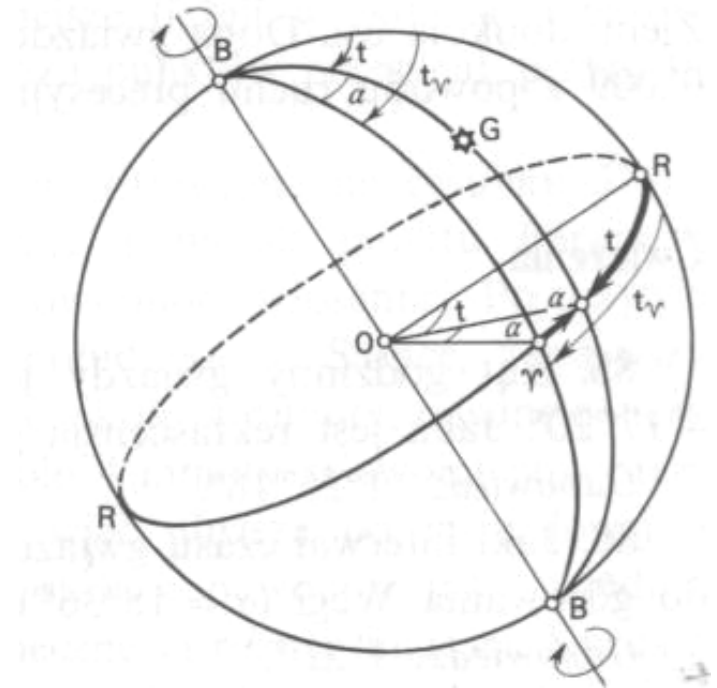
$$\vartheta = t\gamma$$

$$t\gamma = \alpha + t$$

$$\vartheta = \alpha + t$$

dla obiektu górującego $t = 0$

$$\vartheta = \alpha_{t=0}$$



- czas gwiazdowy „uniwersalny” ϑ_0 : $\vartheta = \vartheta_0 + \lambda$
- $\vartheta_0 \simeq \text{UTC} + 24^{\text{h}} \times (d - 23.09) / 365.242$

- czas prawdziwy słoneczny

– kąt godzinny środka tarczy Słońca $t_{\odot} + 12^h$ (od 1925 r.)

to czas, jaki wskazują zegary słoneczne

rektascensja Słońca rośnie ok. 4^m na dobę – doba słoneczna jest dłuższa od doby gwiazdowej

- czas średni słoneczny

– kąt godzinny tzw. Słońca średniego ($t_{\odot} + 12^h$) – punktu poruszającego się jednostajnie po równiku i przechodzi przez punkt Barana jednocześnie ze Słońcem prawdziwym

– Słońce prawdziwe porusza się po ekliptyce

$$\sin \alpha = \frac{\sin \delta \cos \varepsilon - \sin \beta}{\cos \delta \sin \varepsilon}$$

$$\cos \alpha = \cos \lambda \cos \beta / \cos \delta$$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \varepsilon \sin \lambda$$

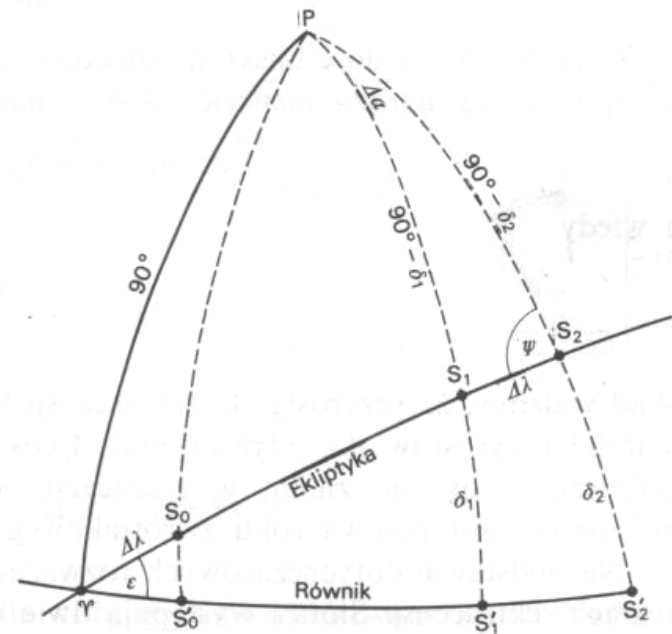
$$\sin \alpha_{\odot} = \frac{\sin \delta_{\odot} \cos \varepsilon}{\cos \delta_{\odot} \sin \varepsilon}$$

$$\cos \alpha_{\odot} = \cos \lambda_{\odot} / \cos \delta_{\odot}$$

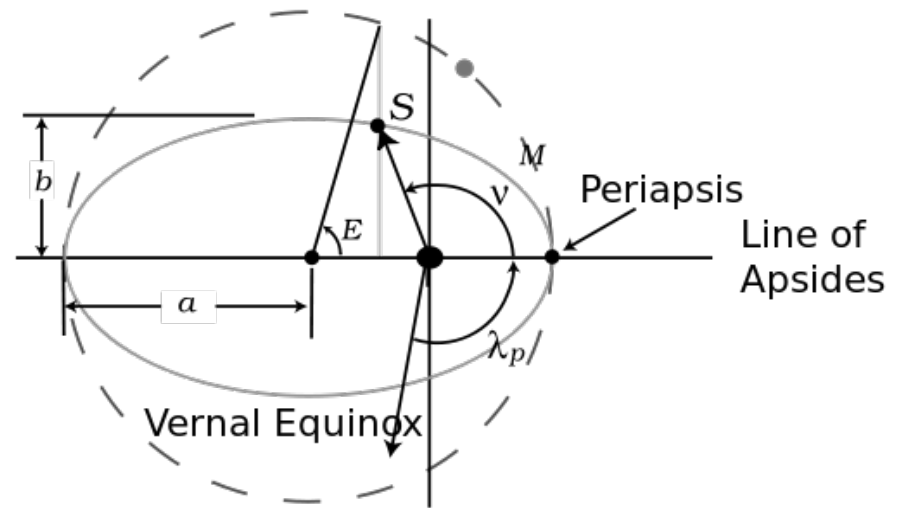
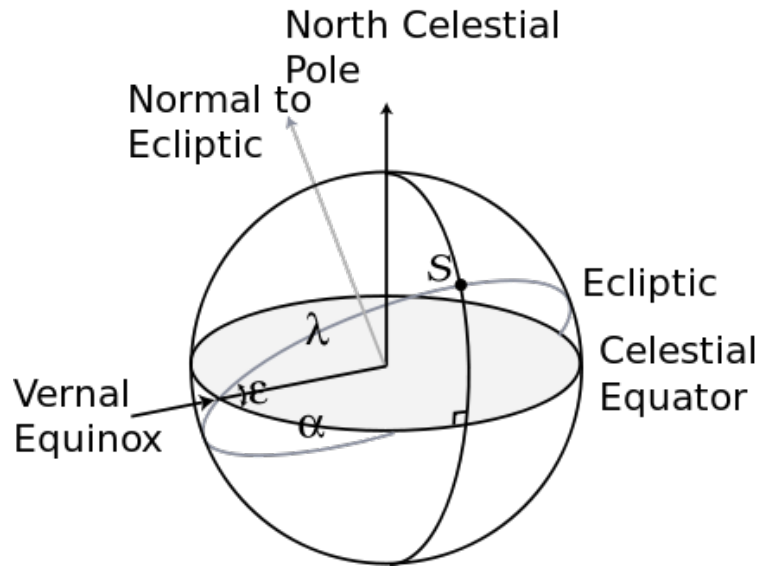
$$\sin \delta_{\odot} = \sin \varepsilon \sin \lambda_{\odot}$$

$$\frac{\sin \alpha_{\odot}}{\cos \alpha_{\odot}} = \frac{\sin \delta_{\odot} \cos \varepsilon}{\cos \lambda_{\odot} \sin \varepsilon} = \frac{\sin \lambda_{\odot} \cos \varepsilon}{\cos \lambda_{\odot}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\odot} = \operatorname{tg} \lambda_{\odot} \cos \varepsilon$$



– Słońce prawdziwe porusza się po elipsie (względem Ziemi)



$$\lambda_{\odot} = \nu + \lambda_p$$

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

$$M = E - e \sin E$$

$$M = 2\pi n / 365.242$$

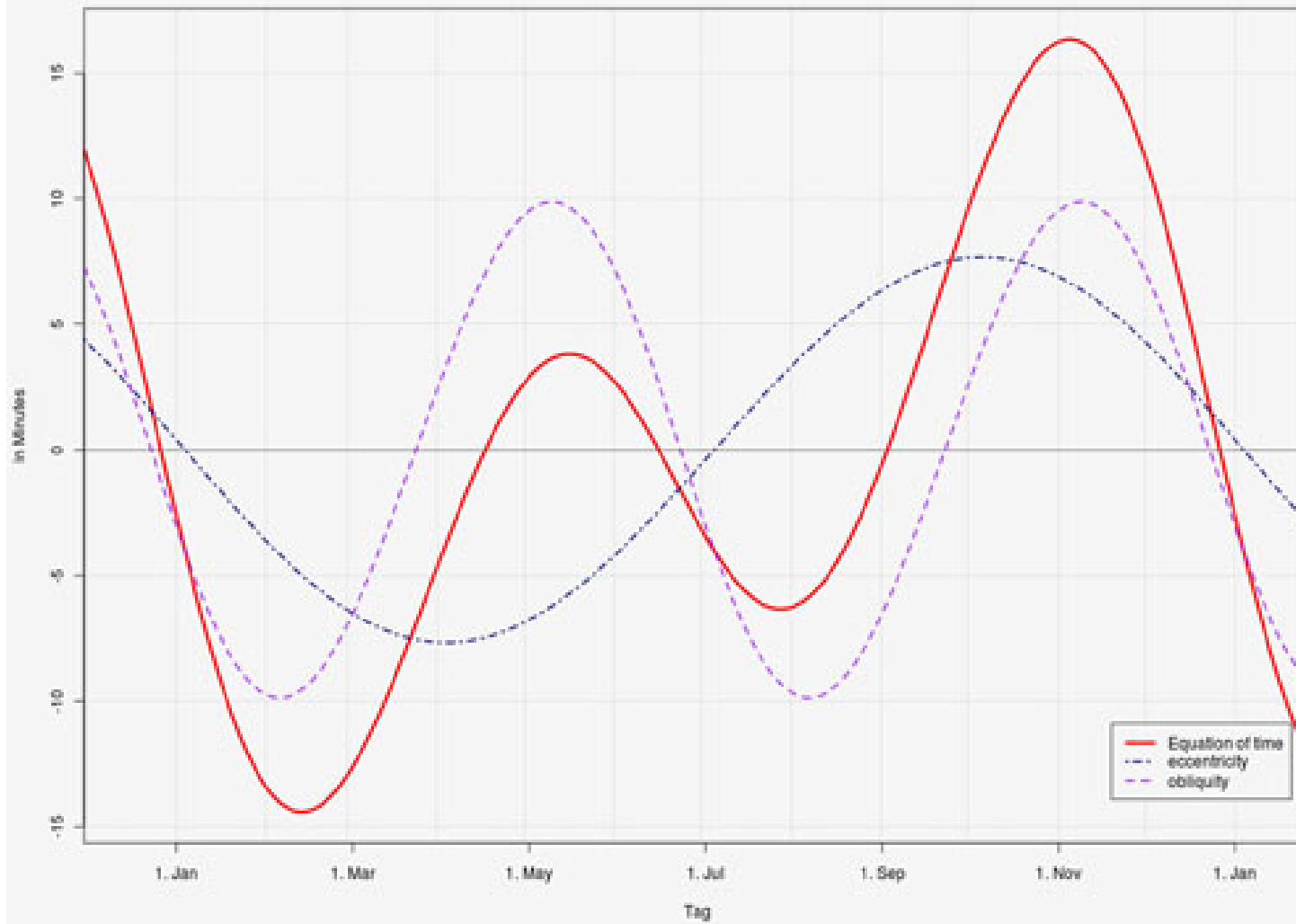
- równanie czasu

$$\eta = t_{\odot} - t_{\overline{\odot}} = \alpha_{\odot} - \alpha_{\overline{\odot}}$$

$$\eta \simeq -2e \sin M + \operatorname{tg}^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin(2M + 2\lambda_p)$$

$$\eta \simeq -7.657 \sin M + 9.862 \sin(2M + 3.599) \text{ [min]}$$

Equation of time: real time - average time



wyznaczanie szerokości i długości geograficznej

- wyznaczanie szerokości geograficznej metodą Talcotta

– pomiar odległości zenitalnej dwóch gwiazd górujących po obu stronach zenitu (teleskop zenitalny)

→ odległości zenitalne powinny być zbliżone do siebie i małe

$$\varphi = \delta_N - z_{0N} = \delta_N - (z_N + r_N)$$

$$\varphi = \delta_S + z_{0S} = \delta_S + (z_S + r_S)$$

w sumie

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_S + \delta_N) + \frac{1}{2}(z_S - z_N) + \frac{1}{2}(r_S - r_N)$$

- wyznaczanie szerokości geograficznej metodą Piewcowa

– pomiar czasu przejścia dwóch gwiazd przez ten sam almukantarat (linia tej samej wysokości)

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos(\vartheta_1 - \alpha_1) = \\ &= \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos(\vartheta_2 - \alpha_2)\end{aligned}$$

dzieląc przez $\cos \varphi$ i odejmując stronami

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos \delta_1 \cos(\vartheta_1 - \alpha_1) - \cos \delta_2 \cos(\vartheta_2 - \alpha_2)}{\sin \delta_1 - \sin \delta_2}$$

→ jeśli gwiazdy w momencie pomiaru znajdują się symetrycznie po obu stronach pierwszego wertykału minimalizuje się błędy pomiaru czasu

→ metoda jest nieczuła na refrakcję

- wyznaczanie lokalnego czasu gwiazdowego

mając czas średni słoneczny T_{\odot} i równanie czasu η czas prawdziwy słoneczny

$$T_{\odot} = T_{\odot} + \eta$$

z drugiej strony

$$T_{\odot} = t_{\odot} + 12^{\text{h}}$$

a czas gwiazdowy

$$\vartheta = t_{\odot} + \alpha_{\odot}$$

mając zegar gwiazdowy (ϑ_z) wyznaczanie czasu gwiazdowego sprowadza się do wyznaczenia poprawki

$$u = \vartheta - \vartheta_z$$

czas gwiazdowy to rektascensja gwiazdy górującej $\vartheta = \alpha_{A=0}$, czyli poprawkę u otrzymamy notując moment ϑ_z górowania gwiazdy o znanej rektascenscji

– do wyznaczania momentu górowania służy koło południkowe

– w terenie, mając teodolit poprawkę można wyznaczyć z momentów przejścia gwiazdy przez ten sam almukantarat (przed i po górowaniu)

$$u = \alpha - \frac{\vartheta_{z_1} + \vartheta_{z_2}}{2}$$

→ nie potrzeba dokładnego wyznaczenia południka

→ żeby osiągnąć przyzwoitą dokładność odstęp czasu powinien być dostatecznie długi (zwykle $\vartheta_{z_2} - \vartheta_{z_1} \simeq 2^h$)

→ może się zmienić sama poprawka lub refrakcja

znając szerokość geograficzną, poprawkę można wyznaczyć z jednej obserwacji

$$u = \vartheta - \vartheta_z = t + \alpha - \vartheta_z$$

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \delta \cos \varphi}$$

→ potrzebne jest dokładne wyznaczenie wysokości h – uwzględnienie refrakcji

można zmierzyć momenty przejścia dwóch gwiazd przez ten sam almukantarat po obu stronach południka, najlepiej w okolicy pierwszego wertykału (metoda Zingera)

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos(\vartheta_1 - \alpha_1) = \\ &= \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos(\vartheta_2 - \alpha_2) \end{aligned}$$

podstawiając

$$\vartheta_1 = \vartheta_{z_1} + u, \quad \vartheta_2 = \vartheta_{z_2} + u$$

otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} & \sin \varphi \sin \delta_1 + \cos \varphi \cos \delta_1 \cos(\vartheta_{z_1} - \alpha_1 + u) = \\ & = \sin \varphi \sin \delta_2 + \cos \varphi \cos \delta_2 \cos(\vartheta_{z_2} - \alpha_2 + u) \end{aligned}$$

a stąd

$$u = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{1}{2}(\vartheta_{z_1} + \vartheta_{z_2}) + \frac{1}{15}(n - m)$$

$$\operatorname{tg} m = \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta_2 + \delta_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}}{\operatorname{tg} \tau}, \quad \sin n = \frac{\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \frac{\delta_2 - \delta_1}{2} \cos m}{\sin \tau}$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \vartheta_{z_1} + \vartheta_{z_2})$$

- wyznaczanie długości geograficznej

od 1984 roku długość geograficzna wschodnia jest dodatnia

w związku z tym kąt godzinny obiektu w miejscu obserwacji (o długości geograficznej λ)

$$t = t_0 + \lambda$$

gdzie t_0 to kąt godzinny obserwowany w Greenwich, czyli sama długość geograficzna

$$\lambda = t - t_0$$

jeśli obiektem będzie Słońce średnie

$$\lambda = t_{\odot} + 12^h - \text{UT} = \vartheta - \alpha_{\odot} + 12^h - \text{UT}$$

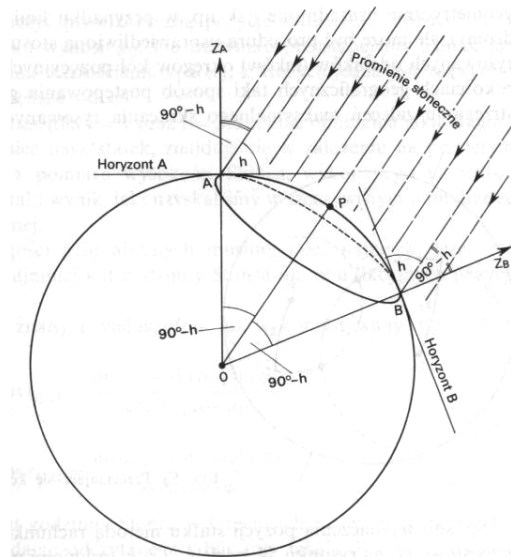
- praktyczne wyznaczanie pozycji miejsca obserwacji

obiekt o współrzędnych (α, δ) góruje w zenicie w miejscu na Ziemi o współrzędnych (φ_p, λ_p)

$$\varphi_p = \delta, \quad \lambda_p = -t_0 = \alpha - \vartheta_0$$

dla Słońca

$$\varphi_p = \delta_{\odot}, \quad \lambda_p = -(\text{UT} + \eta - 12^{\text{h}})$$



jeśli obserwator widzi obiekt w odległości zenitalnej z , to znajduje się na małym kole o promieniu z i środku w (φ_p, λ_p)

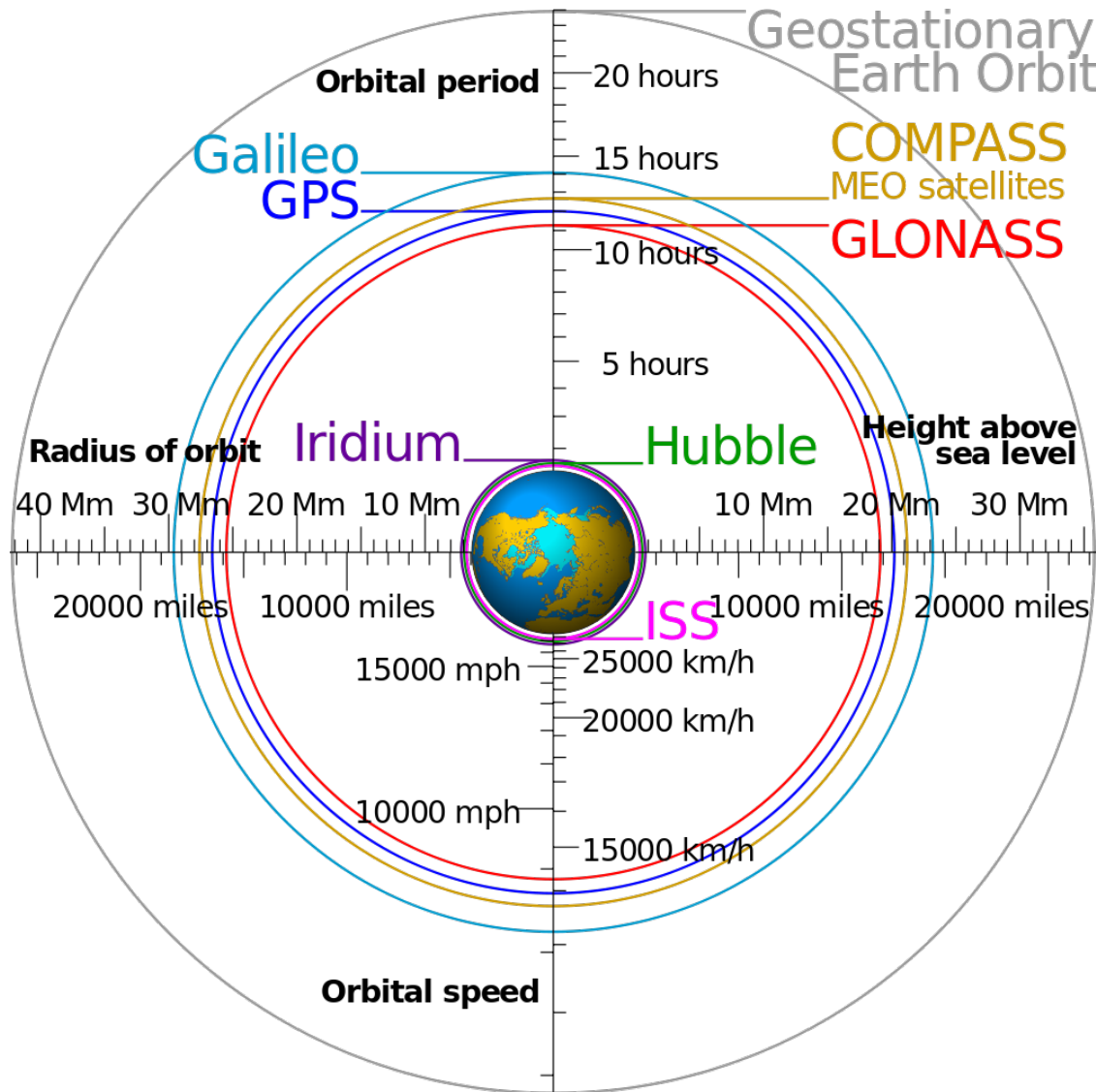
dwa okręgi na mapie przecinają się w dwóch punktach – w jednym z nich znajduje się obserwator

- *Global Positioning System*

- + GLObal NAvigation Satellite System (2011)
- + Galileo positioning system (2016–2020?)
- + BeiDou (Compass) navigation system (2011–2018)
- + Indian Regional Navigational Satellite System (2018)

kilkadziesiąt (początkowo 24) satelitów na 6 orbitach

- o wysokości ok. 20 200 km
- nachyleniu ok. 55°
- rozmieszczonych po 60° w rektascensji węzła wstępującego



wysyłają sygnał (1.57542 GHz) zawierający m.in.

- czas nadania sygnału (t_i)
- pozycję ($[x_i, y_i, z_i]$)

odbiornik odbiera sygnał w chwili t_r i może obliczyć swoje położenie $[x, y, z]$ jeśli odbiera sygnał min. z 4 satelitów ($n \geq 4$)

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = (t_r + b - t_i)^2 c^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

lub

$$p_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} - bc, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gdzie $p_i = (t_r - t_i)c$ – tzw. pseudoodległość

- b to tzw. *bias* – niedokładność zegara w odbiorniku

Orientacja na niebie – gwiazdozbiory

<i>nazwa łacińska</i>	<i>skrót</i>	<i>dopełniacz</i>	<i>nazwa polska</i>
Andromeda	And	Andromedae	Andromeda
Antlia	Ant	Antliae	Pompa
Apus	Aps	Apodis	Ptak Rajski
Aquarius	Aqr	Aquarii	Wodnik
Aquila	Aql	Aquilae	Orzeł
Ara	Ara	Arae	Ołtarz
Aries	Ari	Arietis	Baran
Auriga	Aur	Aurigae	Woźnica
Bootes	Boo	Bootis	Wolarz
Caelum	Cae	Caeli	Rylec
Camelopardalis	Cam	Camelopardalis	Żyrafa
Cancer	Cnc	Cancri	Rak
Canes Venatici	CVn	Canum Venaticorum	Psy Gończe
Canis Major	CMa	Canis Majoris	Wielki Pies
Canis Minor	CMi	Canis Minoris	Mały Pies
Capricornus	Cap	Capricorni	Koziorożec
Carina	Car	Carinae	Kil
Cassiopeia	Cas	Cassiopeiae	Kasjopea
Centaurus	Cen	Centauri	Centaur

Cepheus	Cep	Cephei	Cefeusz
Cetus	Cet	Ceti	Wieloryb
Chamaeleon	Cha	Chamaeleontis	Kameleon
Circinus	Cir	Circini	Cyrkiel
Columba	Col	Columbae	Gołąb
Coma Berenices	Com	Come Berenices	Warkocz Bereniki
Corona Australis	CrA	Coronae Australis	Korona Południowa
Corona Borealis	CrB	Coronae Borealis	Korona Północna
Corvus	Crv	Corvi	Kruk
Crater	Crt	Crateris	Puchar
CruX	Cru	Crucis	Krzyż
Cygnus	Cyg	Cygni	Łabędź
Delphinus	Del	Delphini	Delfin
Dorado	Dor	Doradus	Złota Ryba
Draco	Dra	Draconis	Smok
Equuleus	Equ	Equulei	Żrebię
Eridanus	Eri	Eridani	Erydan
Fornax	For	Fornacis	Piec
Gemini	Gem	Geminorum	Bliźnięta
Grus	Gru	Gruis	Żuraw
Hercules	Her	Herculis	Herkules
Horologium	Hor	Horologii	Zegar
Hydra	Hya	Hydrae	Hydra

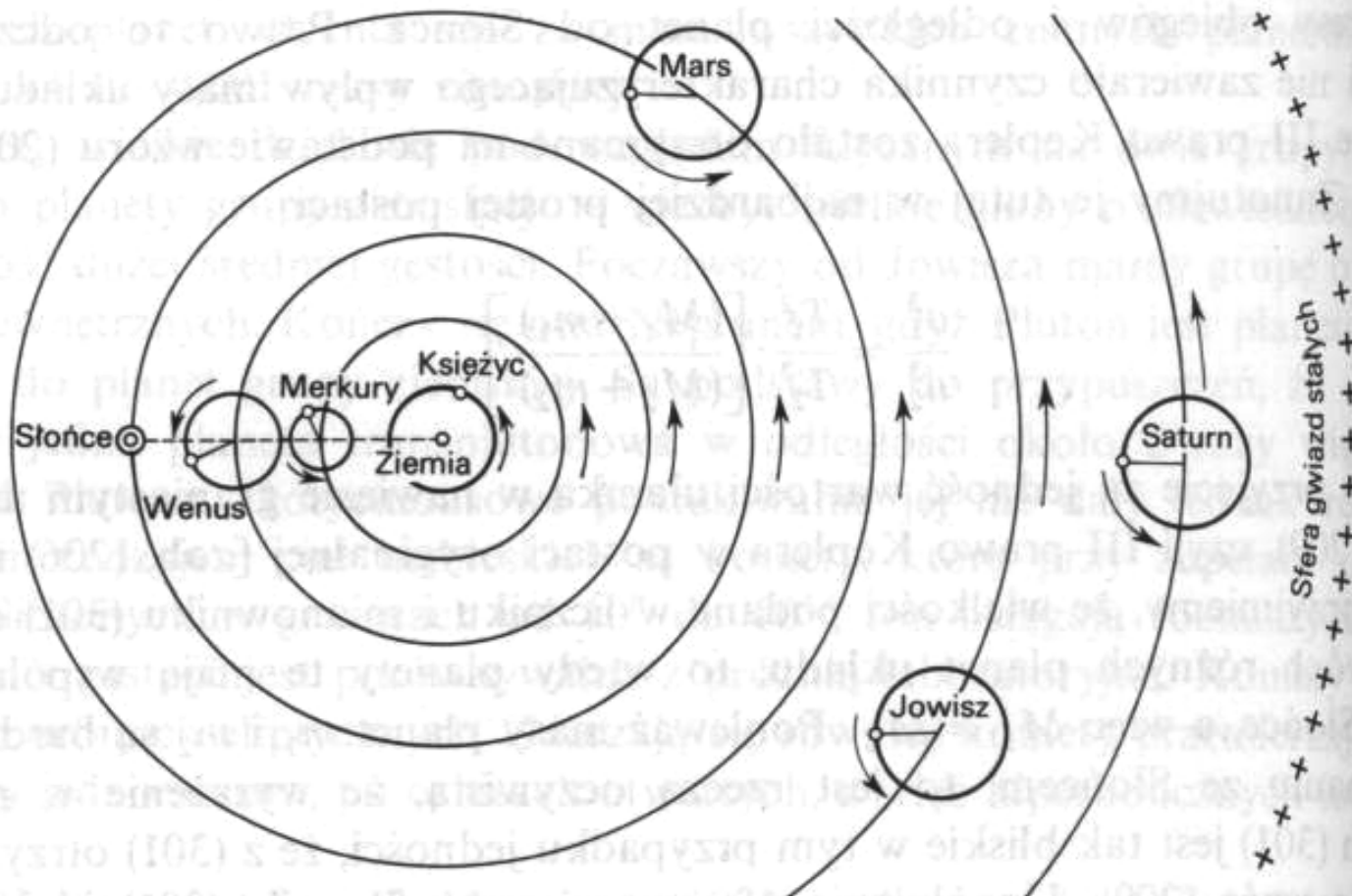
Hydrus	Hyi	Hydri	Wąż Wodny
Indus	Ind	Indi	Indianin
Lacerta	Lac	Lacertae	Jaszczurka
Leo	Leo	Leonis	Lew
Leo Minor	LMi	Leonis Minoris	Mały Lew
Lepus	Lep	Leporis	Zając
Libra	Lib	Librae	Waga
Lupus	Lup	Lupi	Wilk
Lynx	Lyn	Lyncis	Ryś
Lyra	Lyr	Lyrae	Lutnia
Mensa	Men	Mensae	Góra Stołowa
Microscopium	Mic	Microscopii	Mikroskop
Monoceros	Mon	Monocerotis	Jednorożec
Musca	Mus	Muscae	Mucha
Norma	Nor	Normae	Węgielnica
Octans	Oct	Octantis	Oktant
Ophiuchus	Oph	Ophiuchi	Wężownik
Orion	Ori	Orionis	Orion
Pavo	Pav	Pavonis	Paw
Pegasus	Peg	Pegasi	Pegaz
Perseus	Per	Persei	Perseusz
Phoenix	Phe	Phoenicis	Feniks
Pictor	Pic	Pictoris	Malarz

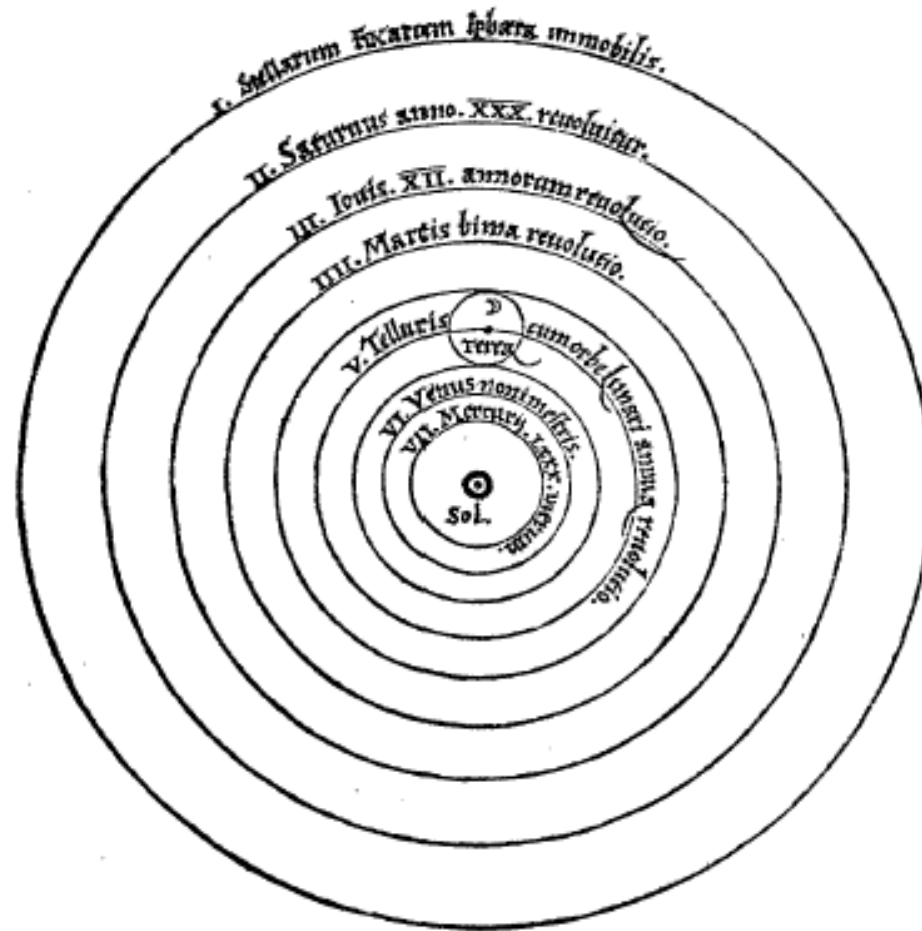
Pisces	Psc	Piscium	Ryby
Piscis Austrinus	PsA	Piscis Austrini	Ryba Południowa
Puppis	Pup	Puppis	Rufa
Pyxis	Pyx	Pyxidis	Kompas
Reticulum	Ret	Reticuli	Sieć
Sagitta	Sge	Sagittae	Strzała
Sagittarius	Sgr	Sagittarii	Strzelec
Scorpius	Sco	Scorpii	Skorpion
Sculptor	Scl	Sculptoris	Rzeźbiarz
Scutum	Sct	Scuti	Tarcza Sobieskiego
Serpens	Ser	Serpentis	Wąż
Sextans	Sex	Sextantis	Sekstant
Taurus	Tau	Tauri	Byk
Telescopium	Tel	Telescopii	Luneta
Triangulum	Tri	Trianguli	Trójkąt
Triangulum Australe	TrA	Trianguli Australis	Trójkąt Południowy
Tucana	Tuc	Tucanae	Tukan
Ursa Maior	UMa	Ursae Maioris	Wielka Niedźwiedzica
Ursa Minor	UMi	Ursae Minoris	Mała Niedźwiedzica
Vela	Vel	Velorum	Żagiel
Virgo	Vir	Virginis	Panna
Volans	Vol	Volantis	Ryba Latająca
Vulpecula	Vul	Vulpeculae	Lis

Ruchy planet

- planety zmieniają swoje położenie na niebie
- przemieszczają się w pobliżu ekliptyki
- poruszają się ruchem prostym i wstecznym
- planety dolne – dwa złączenia i maksymalne elongacje
- planety górne – złączenie, opozycja (przeciwstawienie) i kwadratury (stanowiska) wschodnie i zachodnie

Świat w starożytności





Mikołaj Kopernik, *De revolutionibus orbium coelestium* (1543)

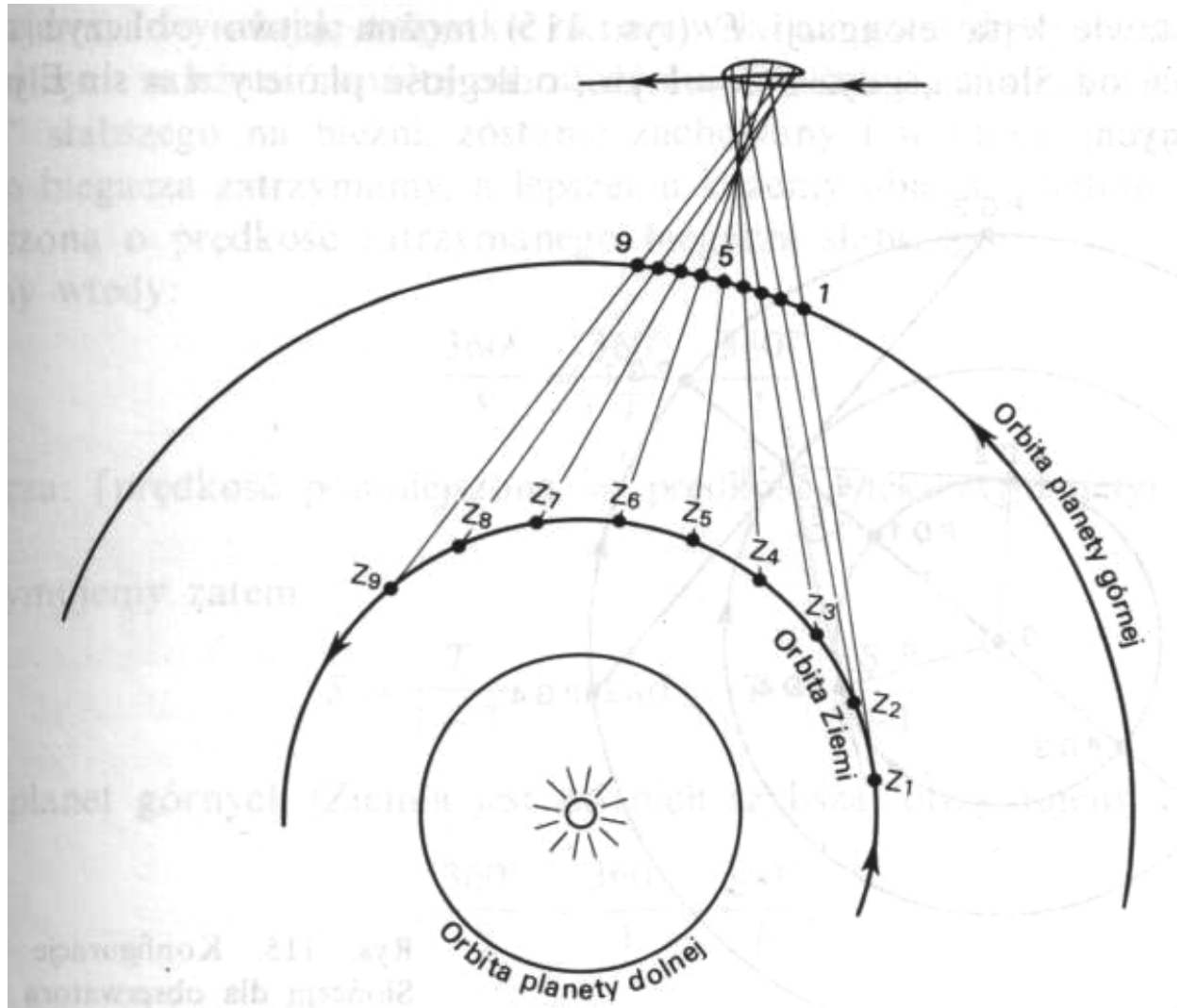
- wyeliminowanie epicykli z teorii ruchu planet
- wyjaśnienie rocznego okresu w ruchach planet

dla planety dolnej

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T}, \quad P = \frac{S}{1 + S}$$

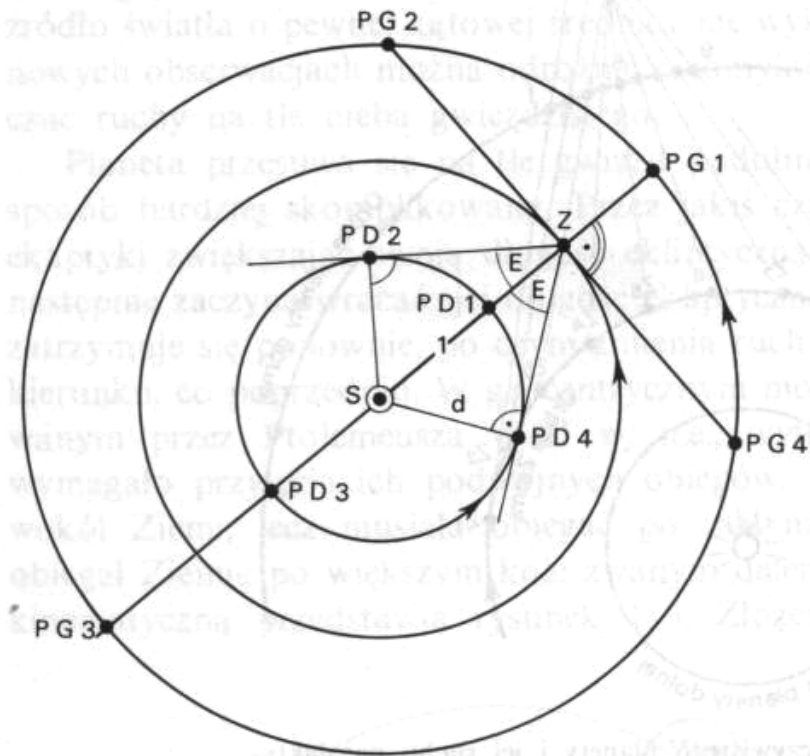
dla planety górnej

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{S} + \frac{1}{P}, \quad P = \frac{S}{S - 1}$$

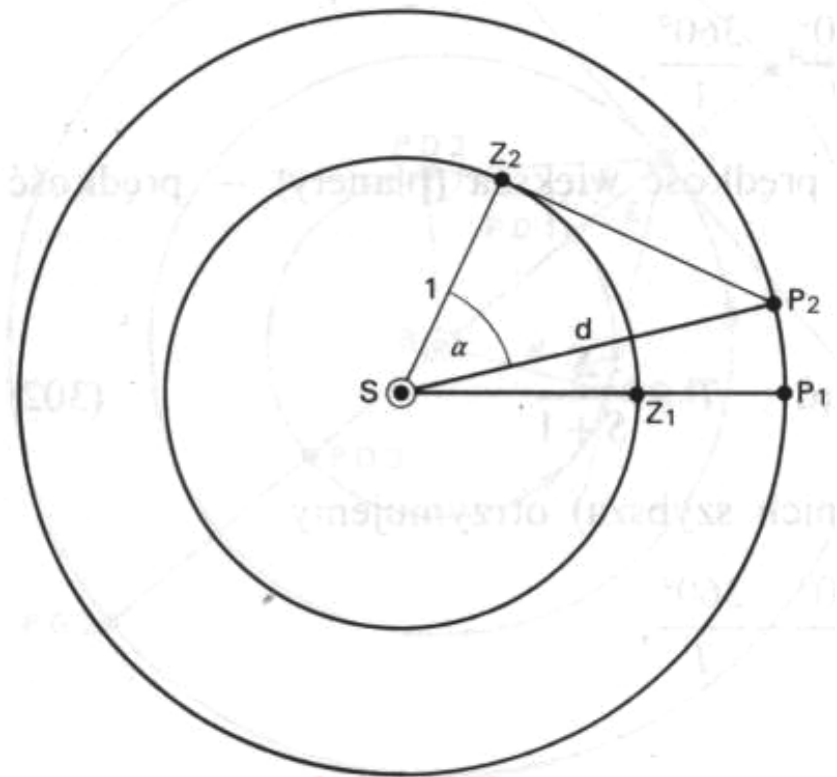


– wyznaczenie odległości planet

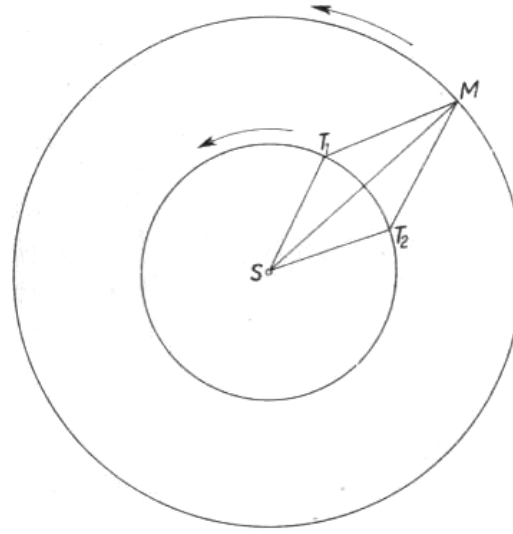
dolnych



górných



obserwacje Tychona Brahe (XVI w) i Johannes Kepler (XVI/XVII)

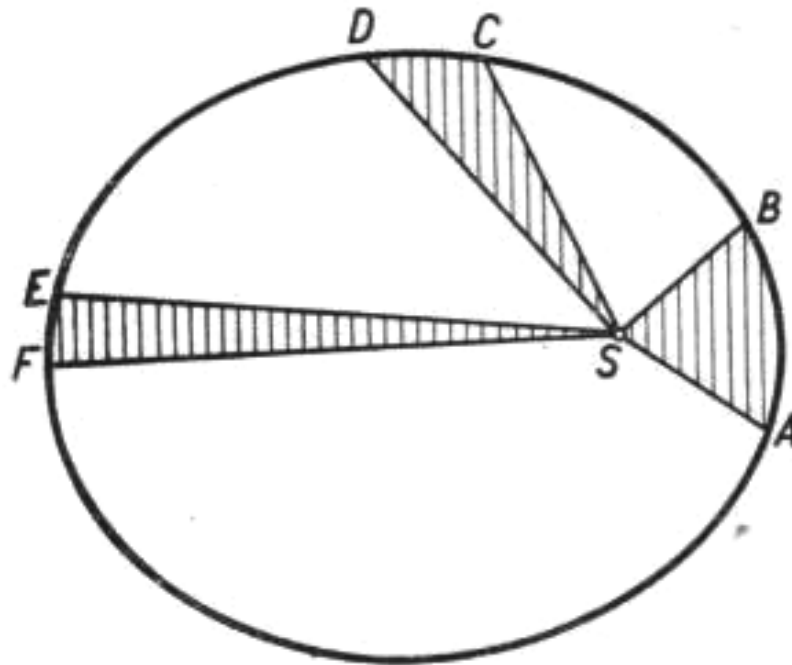


prawa Keplera

Johannes Kepler, *Astronomia nova* (1609)

– planety (Mars) nie poruszają się po okręgach ale elipsach ze Słońcem w jednym z ognisk

– promień wodzący planety zakreśla równe pola w równych odstępach czasu



– kwadraty okresów gwiazdowych planet są proporcjonalne do sześciątów półosi wielkich ich orbit $P^2 \propto a^3$

prawo powszechnego ciążenia

Issac Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687)

– siła przyciągająca dwa ciała jest proporcjonalna do ich mas i odwrotnie do kwadratów odległości

$$F = -G \frac{Mm}{r^2}$$

– stała grawitacji (Cavendisha) $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

zagadnienie dwóch ciał

siła odśrodkowa w ruchu ciała po okręgu

$$F_o = m\omega^2 r$$

gdzie $\omega = 2\pi/T$, jest równoważona przez dośrodkową (siłę grawitacyjną)

$$F_d = GMm/r^2$$

(poprawniej – siłą powodującą ruch po okręgu jest F_d)

po porównaniu obu wyrażeń mamy

$$GMm/r^2 = m\omega^2/r = 4\pi^2 mr/T^2$$

czyli

$$GMT^2 = 4\pi^2 r^3$$

- ogólnie

rozważmy ruch ciała o masie m i Słońca (o masie M)

w dowolnym układzie inercyjnym ruch ciała opisuje równanie

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_\odot}{r}$$

a ruch Słońca

$$\frac{d^2\vec{x}_\odot}{dt^2} = \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_\odot}{r}$$

gdzie $r = \sqrt{(x - x_\odot)^2 + (y - y_\odot)^2 + (z - z_\odot)^2}$

zajmijmy się ruchem względem Słońca, czyli zamienimy

$$\vec{x} - \vec{x}_\odot \rightarrow \vec{x}$$

wtedy

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -G(M + m) \frac{\vec{x}}{r^3}$$

lub

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -G(M + m) \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -G(M + m) \frac{y}{r^3}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -G(M + m) \frac{z}{r^3}$$

i teraz

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

są to trzy równania drugiego stopnia, po scałkowaniu dostaniemy rozwiązanie w postaci $\vec{x}(t)$, przy czym wprowadzimy sześć stałych

jeśli pomnożyć pierwsze równanie przez $-y$, drugie przez $+x$ to

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

lewe strony to pochodne, więc

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_3$$

analogicznie otrzymamy

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c_1$$

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = c_2$$

mnożąc je przez kolejno z , x i y i dodając mamy

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

czyli ruch w płaszczyźnie przechodzącej przez Słońce

jeśli założymy że ruch odbywa się w płaszczyźnie (x, y) , to $z = 0$
i $dz/dt = 0$, oraz

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c$$

wyrażając x i y we współrzędnych biegunowych

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta$$

czyli

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \vartheta - r \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \vartheta + r \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt}$$

to

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c$$

czyli szybkość polowa jest stała (II prawo Keplera)

wróćmy do równań ruchu

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -G(M + m) \frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -G(M + m) \frac{y}{r^3} \end{aligned}$$

mnożąc pierwsze przez dx/dt , drugie przez dy/dt mamy

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} = -G(M + m) \frac{1}{r^3} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right)$$

lewa strona to pochodna sumy

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

a z prawej strony jest pochodna promienia wodzącego

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r \frac{dr}{dt} = \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}\right)$$

czyli

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right] = -G(M + m) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

i po scałkowaniu

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = V^2 = \frac{2G(M + m)}{r} + h$$

gdzie h jest całką energii

spróbujemy wyeliminować jawną zależność od czasu i wyznaczyć trajektorię ruchu w biegunowym układzie współrzędnych

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2G(M+m)}{r} + h$$

wiemy, że prędkość połowa $r^2 d\vartheta/dt = c$, czyli

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r^2}$$

zaś

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$$

to

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2G(M+m)}{r} + h$$

wprowadźmy zmienną

$$u = \frac{c}{r} - \frac{G(M + m)}{c}$$

wtedy

$$\frac{du}{d\vartheta} = c \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta} = -\frac{c}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\vartheta}$$

i mamy

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2} = \frac{2G(M + m)}{r} + h$$

czyli

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 = h + \left[\frac{G(M + m)}{c}\right]^2 - u^2 = b^2 - u^2$$

gdzie $b^2 = h + [G(M + m)/c]^2$

po spierwiastkowaniu

$$d\vartheta = \pm \frac{du}{\sqrt{b^2 - u^2}}$$

i całkowaniu (wybierając np. ujemny pierwiastek)

$$\vartheta = \arccos \frac{u}{b} + \omega$$

$$u = b \cos(\vartheta - \omega)$$

ω jest piątą stałą całkowania

podstawiając wyrażenia na u i b

$$\frac{c}{r} - \frac{G(M + m)}{c} = \sqrt{\frac{G^2(M + m)^2}{c^2} + h \cdot \cos(\vartheta - \omega)}$$

i w końcu

$$r = \frac{\frac{c^2}{G(M+m)}}{1 + \sqrt{1 + \frac{c^2 h}{G^2(M+m)^2} \cdot \cos(\vartheta - \omega)}}$$

jeśli oznaczymy

$$p = \frac{c^2}{G(M+m)}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{c^2 h}{G^2(M+m)^2}}$$

$$v = \vartheta - \omega$$

to otrzymamy równanie cięcia stożkowego (I prawo Keplera)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad p = a(1 - e^2)$$

same stałe całkowania

$$c = \sqrt{G(M + m)p} = \sqrt{G(M + m)a(1 - e^2)}$$

$$h = -\frac{G^2((M + m)^2(1 - e)^2}{c^2} = \frac{G(M + m)(1 - e^2)}{p} = -\frac{G(M + m)}{a}$$

można też wyrazić wartość prędkości

$$V^2 = \frac{2G(M + m)}{r} - \frac{G(M + m)}{a} = G(M + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

znając odległość ciała od masy centralnej i półoś orbity

wróćmy do równania

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = \frac{2G(M + m)}{r} + h$$

czyli

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2G(M+m)}{r} + h - \frac{c^2}{r^2}$$

podstawiając c i h

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2G(M+m)}{r} - \frac{G(M+m)}{a} - \frac{G(M+m)a(1-e^2)}{r^2}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = G(M+m) \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{a(1-e^2)}{r^2} \right]$$

wyliczając dt

$$dt = \frac{\sqrt{a}rdr}{\sqrt{G(M+m)}\sqrt{2ar - r^2 - a^2(1-e^2)}} = \frac{\sqrt{a}rdr}{\sqrt{G(M+m)}\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}}$$

$$dt = -\frac{\sqrt{a}[a - (a - r)]d(a - r)}{\sqrt{G(M + m)}\sqrt{a^2e^2 - (a - r)^2}} =$$

$$= \frac{-a\sqrt{a}}{\sqrt{G(M + m)}} \cdot \frac{d(a - r)}{\sqrt{a^2e^2 - (a - r)^2}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{G(M + m)}} \cdot \frac{(a - r)d(a - r)}{\sqrt{a^2e^2 - (a - r)^2}}$$

to można scałkować

$$(t - t_0) = \pm \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G(M + m)}} \left[\arccos \left(\frac{a - r}{ae} \right) - e \sqrt{1 - \left(\frac{a - r}{ae} \right)^2} \right]$$

podstawiając

$$\frac{a - r}{ae} = \cos E$$

dostaniemy równanie Keplera

$$E - e \sin E = \frac{\sqrt{G(M + m)}}{a^{3/2}} (t - t_0)$$

po jednym okresie obiegu $T = t - t_0$ anomalia średnia E obiegnie jeden okres (2π)

$$2\pi = \frac{\sqrt{G(M + m)}}{a^{3/2}} T$$

a stąd wprost III prawo Keplera

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)}$$

- parametry orbity

a – półoś

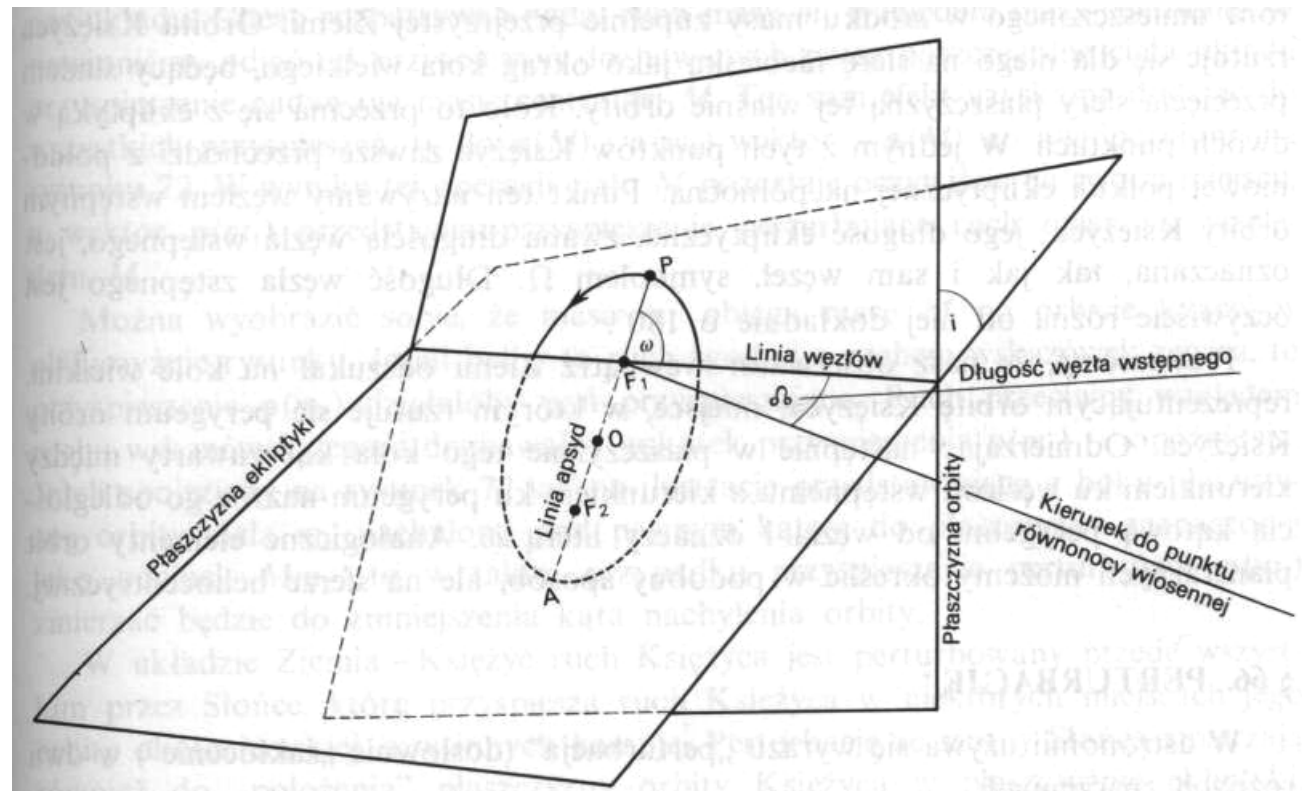
e – mimośród

i – inklinacja

Ω – długość węzła
(wstępującego)

ω – anomalia pery-
centrum

t_0 – moment pery-
centrum



– ich związek z całkami ruchu

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c_1$$

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = c_2$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_3$$

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

$$c = \sqrt{G(M + m)p} = \sqrt{G(M + m)a(1 - e^2)}$$

$$\cos i = c_3/c$$

$$\sin \Omega = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \quad \cos \Omega = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

całka energii

$$V^2 = \frac{2G(M+m)}{r} + h, \quad V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$h = -\frac{G^2((M+m)^2(1-e)^2)}{c^2} = \frac{G(M+m)(1-e^2)}{p} = -\frac{G(M+m)}{a}$$

pozostałe całki ruchu

$$\frac{c}{r} - \frac{G(M+m)}{c} = \sqrt{\frac{G^2(M+m)^2}{c^2} + h} \cdot \cos(\vartheta - \omega)$$

$$E - e \sin E = \frac{\sqrt{G(M+m)}}{a^{3/2}}(t - t_0)$$

- wyznaczanie orbit

- sześć niewiadomych – potrzeba sześć równań

- np. $x(t_0) = x_0, \dots$ i $dx/dt|_{t_0} = v_{x_0}, \dots$

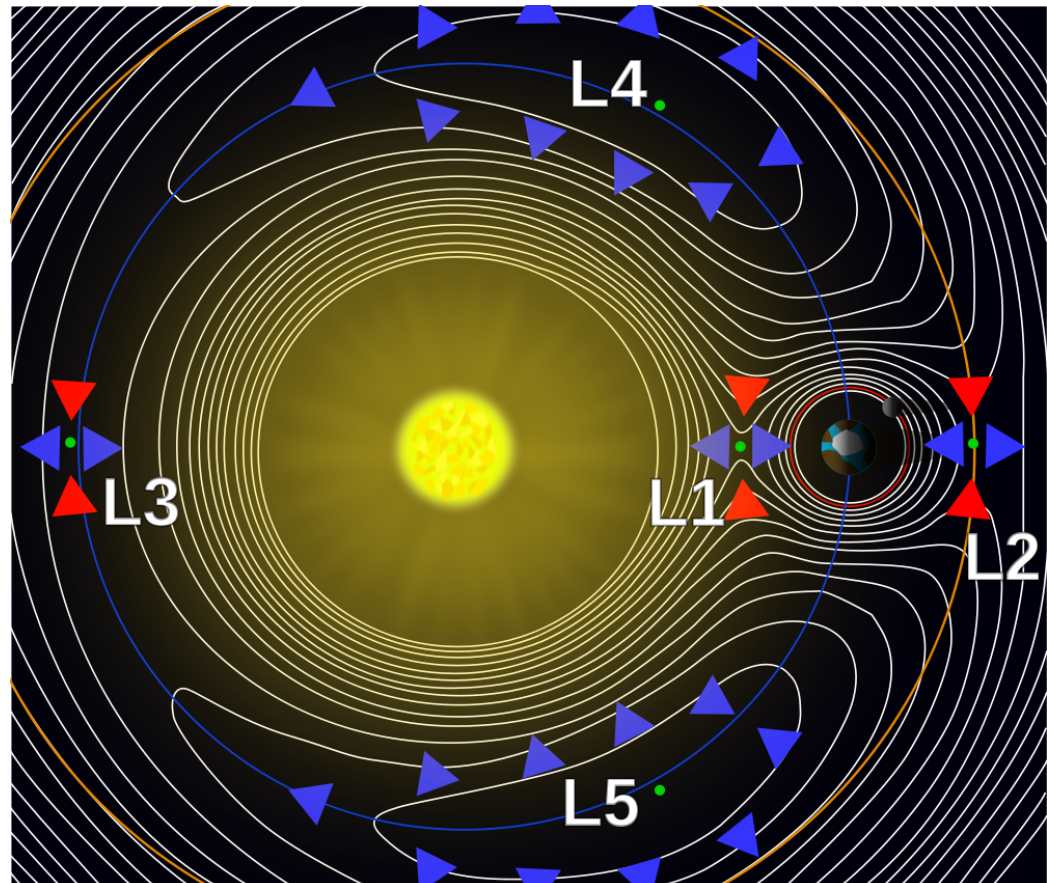
- w praktyce (min.) 3 obserwacje (α, δ) i np. metoda Gaussa

- dla komet można uprościć rachunki zakładając orbitę paraboliczną

- zagadnienie trzech ciał
 - 3 wymiary \times 3 ciała \times 2 rząd równania = 18 stałych
 - dostępnych jedynie 10 całek ruchu
 - rozwiązywalne jedynie w postaci szeregów
 - konieczność rozwiązań numerycznych

- ograniczone zagadnienie trzech ciał

- trzecie ciało jest „lekkie” – można pominąć jego wpływ na pozostałe dwa
- ruch w płaszczyźnie
- rozwiązania Lagrange’a



w Układzie Słonecznym dominująca jest masa Słońca i z powodzeniem można stosować rachunki perturbacyjne

– wpływ innych ciał układu wprowadza się jako mała poprawka w zagadnieniu dwóch ciał

– zaburzenia są zwykle okresowe, więc poprawki wprowadza się jako szeregi trygonometryczne

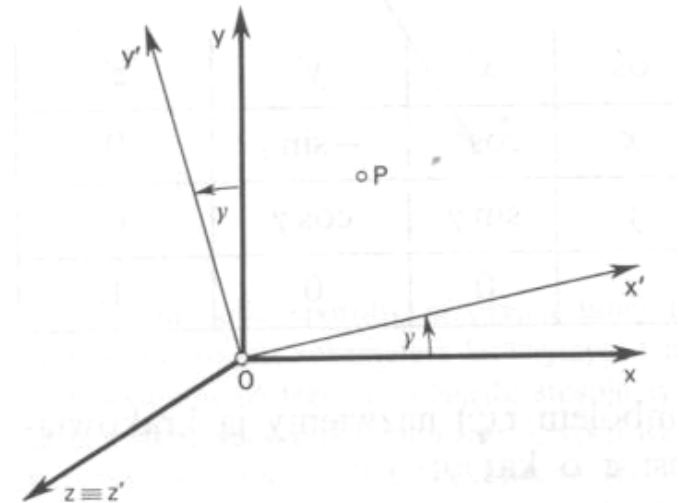
– odkrycie Neptuna (Galle 1846) w oparciu o obliczenia Leverriere – spektakularny sukces mechaniki nieba

– współcześnie stosuje się modelowanie numeryczne

dynamika w układzie obracającym się

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ale teraz $\gamma = \omega t$



- prędkość w układzie rotującym

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ -\cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ale

$$\begin{aligned} -x \sin \omega t + y \cos \omega t &= y' \\ -x \cos \omega t - y \sin \omega t &= -x' \end{aligned}$$

czyli

$$\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ -\cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'\omega \\ -x'\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

spróbujmy to uogólnić na obrót wokół dowolnej osi $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

zauważmy, że jeśli $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$, to

$$\begin{pmatrix} y'\omega \\ -x'\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'\omega_z - z'\omega_y \\ z'\omega_x - x'\omega_z \\ x'\omega_y - y'\omega_x \end{pmatrix}$$

a po lewej stronie mamy iloczyn wektorowy $\vec{x}' \times \vec{\omega}$

oznaczając

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

macierz obrotu $O(\vec{\omega}t)$ i wielkości w układzie obracającym się

$$\vec{x}' = O(\vec{\omega}t)\vec{x}, \quad \vec{v}' = O(\vec{\omega}t)\vec{v}$$

to w końcu

$$\frac{d\vec{x}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{x}' \times \vec{\omega}$$

- przyśpieszenie

zaczniemy tak jak poprzednio

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} +$$

$$+ 2\omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ -\cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

jeśli w układzie (x, y, z) ciało spoczywa i nie przyśpiesza

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} = 0$$

to w układzie (x', y', z') pojawia się przyśpieszenie o wartości

$$\sqrt{\frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{d^2 y'}{dt^2}} = \omega^2 \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$$

jeśli $\vec{v} \neq 0$, pojawia się dodatkowy składnik w przyśpieszeniu

to też warto uogólnić, oznaczmy jeszcze

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}, \quad \vec{a}' = O(\vec{\omega}t)\vec{a}$$

i zapiszmy równanie

$$\frac{d\vec{x}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{x}' \times \vec{\omega}$$

w postaci

$$\frac{d[O(\vec{\omega}t)\vec{x}]}{dt} = O(\vec{\omega}t)\vec{v} + [O(\vec{\omega}t)\vec{x}] \times \vec{\omega}$$

i jeszcze

$$\frac{d[O(\vec{\omega}t)\vec{x}]}{dt} = O(\vec{\omega}t)\frac{d\vec{x}}{dt} + [O(\vec{\omega}t)\vec{x}] \times \vec{\omega}$$

ponieważ \vec{x} jest tu dowolnym wektorem to jest to przepis na różniczkowanie „obracanego” wektora, więc

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{d[O(\vec{\omega}t)\vec{x}]}{dt} \right\} = \frac{d}{dt} \{ O(\vec{\omega}t)\vec{v} + [O(\vec{\omega}t)\vec{x}] \times \vec{\omega} \} = \\ &= \frac{d[O(\vec{\omega}t)\vec{v}]}{dt} + \frac{d[O(\vec{\omega}t)\vec{x}]}{dt} \times \vec{\omega} = O(\vec{\omega}t) \frac{d\vec{v}}{dt} + [O(\vec{\omega}t)\vec{v}] \times \vec{\omega} + \\ &\quad + \{ O(\vec{\omega}t)\vec{v} + [O(\vec{\omega}t)\vec{x}] \times \vec{\omega} \} \times \vec{\omega} = \\ &= O(\vec{\omega}t)\vec{a} + 2[O(\vec{\omega}t)\vec{v}] \times \vec{\omega} + \{ [O(\vec{\omega}t)\vec{x}] \times \vec{\omega} \} \times \vec{\omega} \end{aligned}$$

wyrażając to w wielkościach w układzie rotującym

$$\frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = \vec{a}' + 2\vec{v}' \times \vec{\omega} + (\vec{x}' \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}$$

mamy ogólną postać pseudosiły Coriolisa i odśrodkowej, które pojawiają się w opisie dynamiki w układzie rotującym

gravitacja ziemska

masa: $M_{\oplus} = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

średni promień: $r_{\oplus} = 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$

stała grawitacji: $G = 6.67384 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$

średnie przyśpieszenie grawitacyjne na powierzchni

$$g = \frac{GM_{\oplus}}{r_{\oplus}^2} = 9.822 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

promień biegunowy: $r_b = 6.3568 \cdot 10^6 \text{ m}$

promień równikowy: $r_r = 6.3781 \cdot 10^6 \text{ m}$

przyśpieszenie grawitacyjne na biegunie:

$$g_b = \frac{GM_{\oplus}}{r_b^2} = 9.8659 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

– na równiku:

$$g_r = \frac{GM_{\oplus}}{r_r^2} = 9.8000 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

ale na równiku ciężar zmniejsza siła odśrodkowa $a_r = \omega^2 r_r$
dla $\omega = 7.29246 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

$$a_r = 0.0339 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

w sumie przyśpieszenie na równiku:

$$g_r - a_r = 9.7661 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

przyśpieszenie normalne (dla $\varphi = 45^\circ 5$)
(3 Konferencja Miar i Wag 1901)

$$g_n = 9.80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Wikipedia podaje zależność od szerokości geograficznej i wysokości n.p.m.

$$g_{\varphi} \approx 9.780318 \left(1 + 0.0053024 \sin^2 \varphi - 0.0000058 \sin^2 2\varphi \right) - 3.086 \cdot 10^{-6} h \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

(w angielskiej wersji – że uwzględniono wypór powietrza)

- zależność od wysokości n.p.m.

$$g(h) = \frac{GM}{(r + h)^2}$$

ponieważ (zwykle) $h \ll r$, możemy rozwinąć zależność $g(h)$ w szereg Taylora wokół $h = 0$ i zachować wyraz liniowy w h

$$g(h) \approx \frac{GM}{r^2} - 2 \cdot \frac{GM}{r^3} \cdot h = g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{r} \right)$$

- wpływ innych ciał niebieskich

– Słońce:

masa: $M_{\odot} = 1.9891 \cdot 10^{30}$ kg

odległość: $d_{\odot} = 1.496 \cdot 10^{11}$ m

przyśpieszenie grawitacyjne pochodzące od Słońca:

$$g_{\odot} = \frac{GM_{\odot}}{d_{\odot}^2} \approx 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

– Księżyc:

masa: $M_{\zeta} = 7.3477 \cdot 10^{22}$ kg

odległość: $d_{\zeta} = 3.844 \cdot 10^8$ m

przyśpieszenie grawitacyjne pochodzące od Księżyca:

$$g_{\zeta} = \frac{GM_{\zeta}}{d_{\zeta}^2} \approx 3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- prędkości kosmiczne

- pierwsza prędkość kosmiczna

- minimalna prędkość z jaką można pozostać na orbicie Ziemi, startując z jej powierzchni

- najmniejszą energię ma ciało na orbicie kołowej

- żeby przuszać się po okręgu w odległości od środka Ziemi równej jej promieniowi siłą odśrodkowa musi równoważyć przyciąganie grawitacyjne

$$\omega^2 r_{\oplus} = \frac{GM_{\oplus}}{r_{\oplus}^2}$$

ale $\omega r = v$, więc

$$\frac{v_I^2}{r} = \frac{GM_{\oplus}}{r_{\oplus}^2}$$

czyli pierwsza prędkość kosmiczna

$$v_I = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_{\oplus}}} \approx 7.91 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

· druga prędkość kosmiczna

- minimalna prędkość z jaką można wydostać się z pola grawitacyjnego Ziemi, startując z jej powierzchni
- całka energii ciała na orbicie stycznej do powierzchni Ziemi wynosi zero

$$\frac{-GM_{\oplus}}{r_{\oplus}} + \frac{v_{II}^2}{2} = 0$$

czyli druga prędkość kosmiczna

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{r_{\oplus}}} \approx 11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

- "kolejne" prędkości kosmiczne

– trzecia – prędkość ucieczki z pola grawitacyjnego Słońca startując z Ziemi

$$\tilde{v}_{III} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{d_{\odot}}} \approx 42 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

ale na orbicie Ziemia ma prędkość

$$v_{\oplus} = \frac{GM_{\odot}}{d_{\odot}^2 \omega_{\oplus}} \approx 29.8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

gdzie prędkość kątowna na orbicie $\omega_{\oplus} = 1.99 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

wystrzelując ciało z Ziemi w kierunku ruchu orbitalnego wystarczy nadać mu prędkość

$$v_{III} = 16.7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

– czwarta – prędkość ucieczki z pola grawitacyjnego Galaktyki

$$\tilde{v}_{IV} = 350 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

uwzględniając prędkość Słońca wokół centrum Galaktyki

$$v_{IV} = 130 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

- promień Schwarzschilda

- zauważmy, że prędkość ucieczki rośnie wraz z maleniem rozmiaru obiektu

- rozmiar obiektu, z powierzchni którego prędkość ucieczki jest równa prędkości światła

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

dla Ziemi

$$r_{s\oplus} = 8.9 \text{ mm}$$

dla Słońca

$$r_{s\odot} = 2.9 \text{ km}$$

obliczmy gęstość obiektu o masie M i promieniu r_s

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r_s^3} = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \cdot \frac{1}{M^2}$$

dla masy Słońca: $1.8 \cdot 10^{19} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

dla masy Ziemi: $2.1 \cdot 10^{30} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

zjawiska w układzie Ziemia – Księżyc

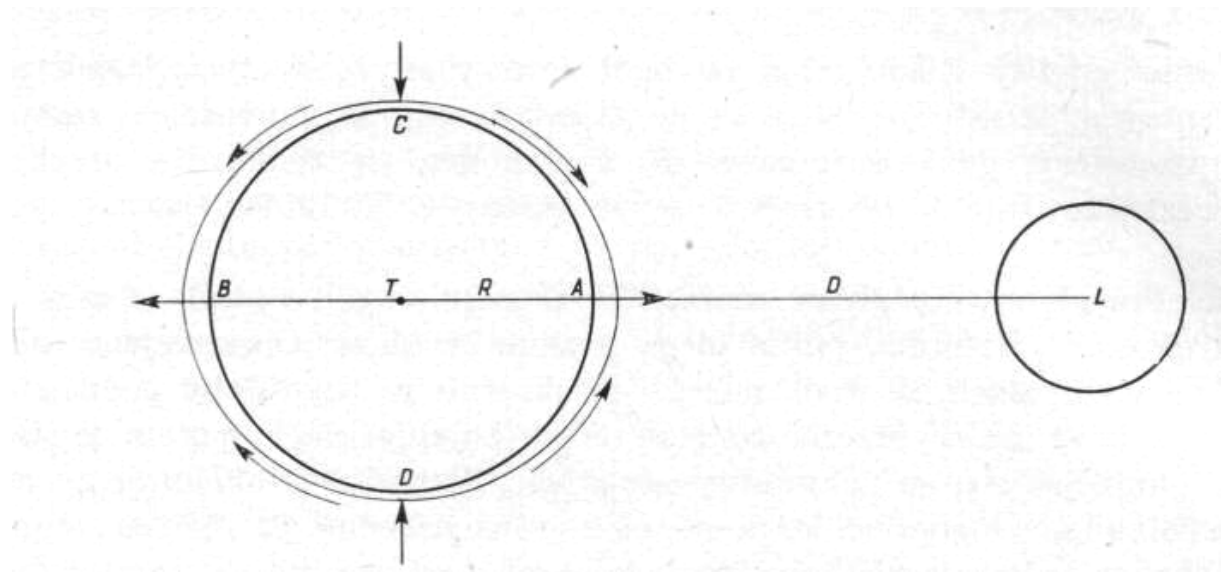
- pływy

przeanalizujemy przyśpieszenie jakie nadaje Księżyc (L) na punkty A i B na powierzchni Ziemi względem jej środka T

$$a_A = \frac{Gm}{(D - R)^2}$$

$$a_B = \frac{Gm}{(D + R)^2}$$

$$a_T = \frac{Gm}{D^2}$$



$$\begin{aligned}
a_A - a_T &= Gm \left[\frac{1}{(D - R)^2} - \frac{1}{D^2} \right] = \\
&= Gm \left[\left(\frac{1}{D^2} + 2R \frac{1}{D^3} + 3R^2 \frac{1}{D^4} + \dots \right) - \frac{1}{D^2} \right] \approx \\
&\approx \frac{Gm}{D^2} \left(\frac{2R}{D} + \frac{3R^2}{D^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_T - a_B &= Gm \left[\frac{1}{D^2} - \frac{1}{(D + R)^2} \right] = \\
&= Gm \left[\frac{1}{D^2} - \left(\frac{1}{D^2} - 2R \frac{1}{D^3} + 3R^2 \frac{1}{D^4} + \dots \right) \right] \approx \\
&\approx \frac{Gm}{D^2} \left(\frac{2R}{D} - \frac{3R^2}{D^2} \right)
\end{aligned}$$

z dokładnością do liniowego rzędu w R/D :

$$\Delta a = a_A - a_T = a_T - a_B = \frac{2GmR}{D^3}$$

jeśli podstawimy dane dla Księżyca

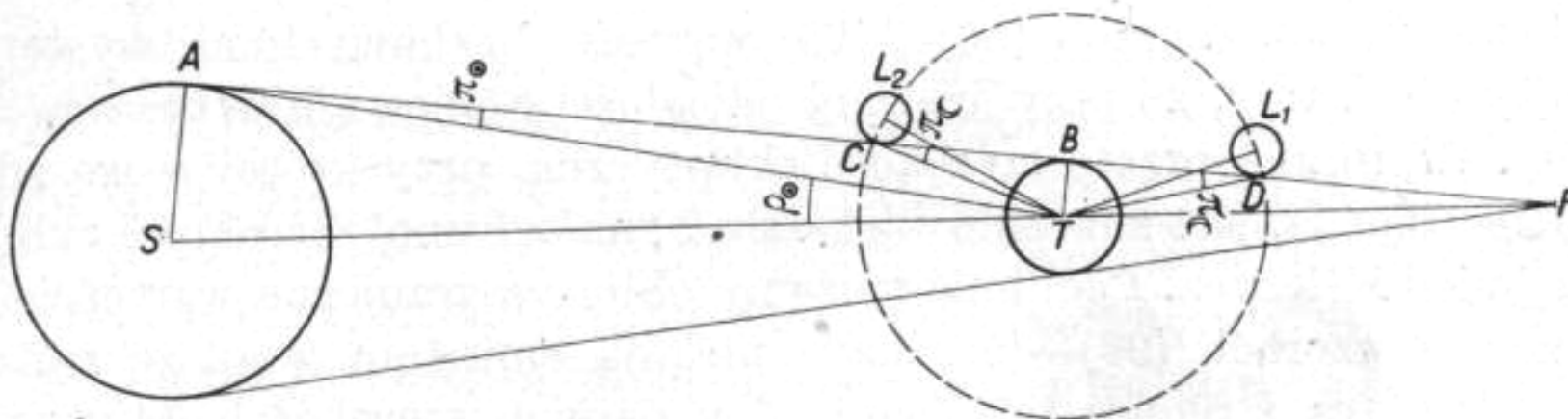
$$\Delta a_{\zeta} = \frac{2GM_{\zeta} R_{\oplus}}{d_{\zeta}^3} = 5.5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

a dla Słońca

$$\Delta a_{\odot} = \frac{2GM_{\odot} R_{\oplus}}{d_{\odot}^3} = 2.5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

przy pełni i nowiu efekty się sumują, przy kwadrach częściowo znoszą

- warunki występowania zaćmień

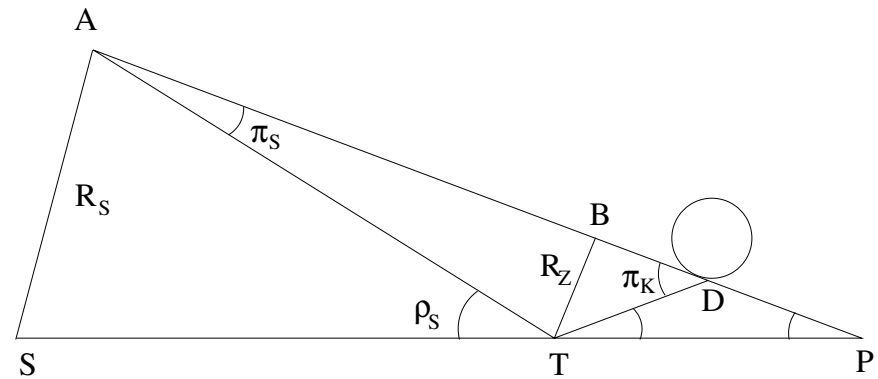


– zaćmienie Księżyca

- graniczna szerokość ekliptyczna dla zaćmienia

$$\beta_1 = \sphericalangle L_1TP = \sphericalangle DTP + \sphericalangle L_1TD$$

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \sphericalangle DTP + \varrho_{\zeta} = \\
&= \pi_{\zeta} - \sphericalangle DPT + \varrho_{\zeta} = \\
&= \pi_{\zeta} - \varrho_{\odot} + \pi_{\odot} + \varrho_{\zeta}
\end{aligned}$$



dla zaćmienia załkowitzego

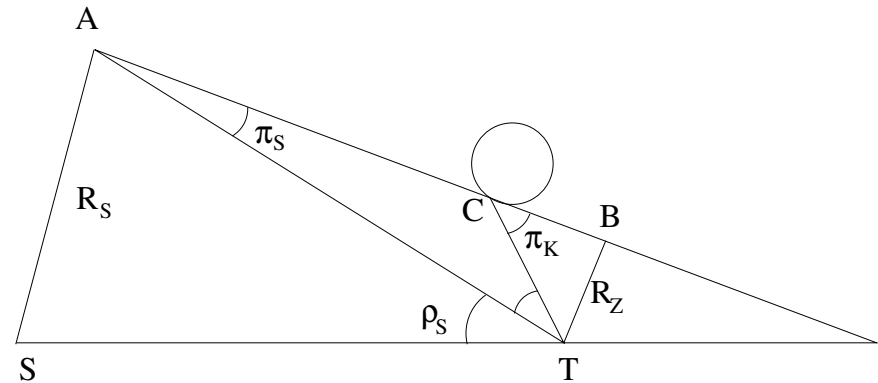
$$\beta_2 = \pi_{\zeta} + \pi_{\odot} - \varrho_{\odot} - \varrho_{\zeta}$$

– zaćmienie Słońca

· graniczna szerokość ekliptyczna dla zaćmienia

$$\beta_3 = \sphericalangle L_2TS = \sphericalangle STA + \sphericalangle ATC + \sphericalangle CTL_2$$

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \varrho_{\odot} + \cancel{\Delta ATC} + \varrho_{\zeta} = \\ &= \varrho_{\odot} + \pi_{\zeta} - \pi_{\odot} + \varrho_{\zeta}\end{aligned}$$



i dla zaćmienia całkowitwgo

$$\beta_4 = \varrho_{\odot} + \pi_{\zeta} - \pi_{\odot} - \varrho_{\zeta}$$

podstawiając średnie wartości liczbowe

$$\frac{\pi_{\odot} \quad \pi_{\zeta} \quad \varrho_{\odot} \quad \varrho_{\zeta}}{0'.1 \quad 56'.8 \quad 16'.0 \quad 15'.5}$$

otrzymamy

$$\frac{\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4}{56'.4 \quad 40'.9 \quad 88'.1 \quad 72'.6}$$

Księżyc porusza się po orbicie o inklinacji $i = 5^\circ 15'$, i możemy obliczyć odległość w długości ekliptycznej Księżyca od węzła

$$\sin \Delta\lambda = \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} i$$

to uwzględniając zmienność inklinacji i , średnic ϱ_\odot i ϱ_ζ i paralaks π_\odot i π_ζ mamy

- dla zaćmień Księżyca: $\Delta\lambda_{\min} = 9^\circ 30'$ i $\Delta\lambda_{\max} = 12^\circ 15'$

- dla zaćmień Słońca: $\Delta\lambda_{\min} = 15^\circ 21'$ i $\Delta\lambda_{\max} = 18^\circ 31'$

· podczas zaćmień Słońce też jest w okolicy węzła orbity Księżyca

- węzły obiegają ekliptykę raz na 18.6 lat
- czas pomiędzy kolejnymi przejściami przez ten sam węzeł orbity Księżyca wynosi tzw. *rok zaćmieniowy*, który wynosi średnio 346.6200 dni
- w ciągu miesiąca synodycznego Słońce przesuwa się względem węzła orbity o kąt $29.53 \cdot 360^\circ / 346.62 = 30^\circ 40'$
 - mniejsze od minimalnego zakresu $2\Delta\lambda_{\min}(30^\circ 42')$ dla Słońca
→ min. 1 zaćmienie Słońca
 - większe od maksymalnego zakresu $2\Delta\lambda_{\min}(24^\circ 30')$ dla Księżyca
→ max. 1 zaćmienie Księżyca
- przy jednym przejściu Słońca przez węzeł orbity Księżyca
- w sumie może być 3–5 zaćmień Słońca i 0–3 zaćmienia Księżyca

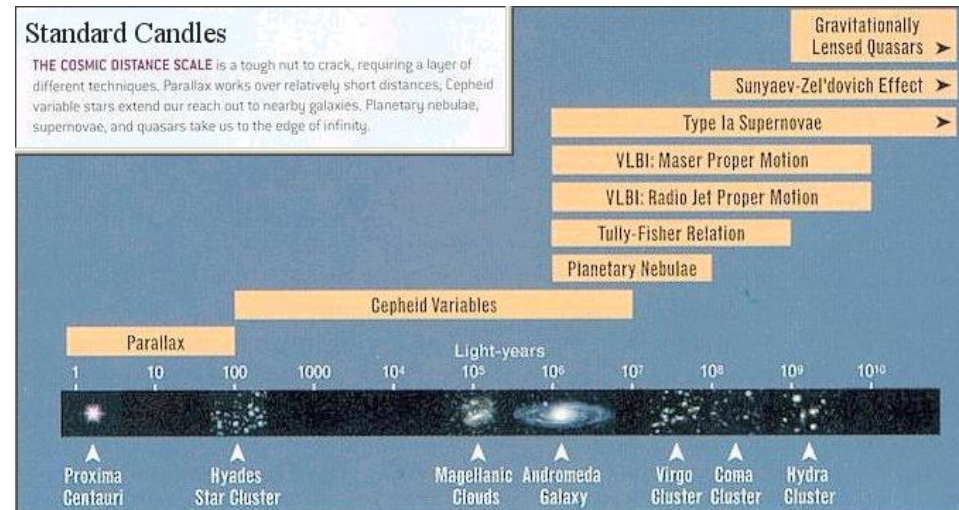
- znany w starożytności okres *saros* (18 lat i 11(10) dni) to
 - 223 miesiące synodyczne
 - 242 miesiące smocze
 - ~19 lat zaćmieniowych

po upływie okresu *saros* zaćmienia powtarzają się, ale Słońce przesuwa się o 28' względem węzła, więc zaćmienia są tylko podobne do siebie

- inne zjawiska typu zaćmień
 - zakrycia gwiazd przez Księżyc
 - zakrycia gwiazd przez planetoidy
 - tranzyty Merkurego (2032) i Wenus (2117)

wyznaczanie odległości w astronomii

- metody geometryczne
 - pomiar odległości
 - pomiar prędkości
- świece standardowe
- prawo Hubbla



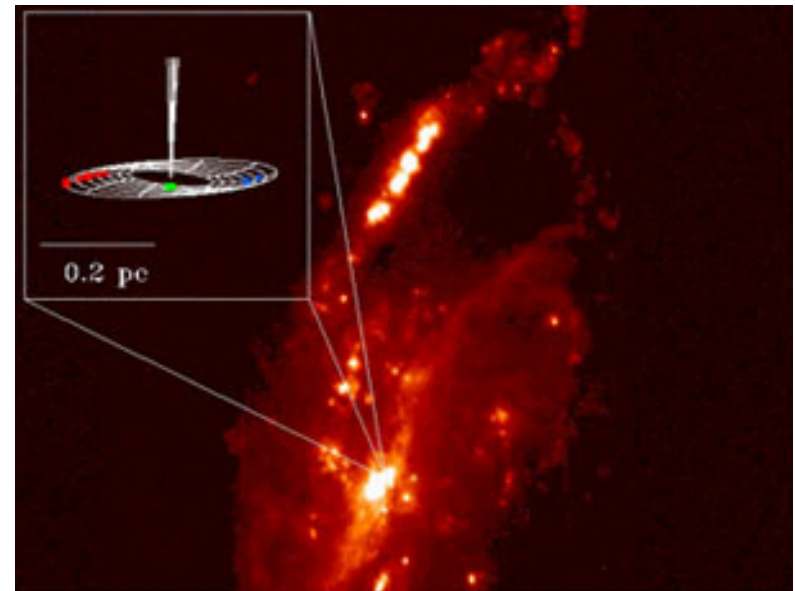
- metody geometryczne
 - z ruchów obiektów w Układzie Słonecznym + prawa Keplera
 - odległości względne (np. w jednostkach astronomicznych)

- kluczowe jest wyznaczenie jednostki
 - paralaksa geocentryczna (Księżyc, bliskie planetoidy)
 - tranzyty planet dolnych
 - aberracja światła gwiazd
 - pomiary radarowe

- ruchy ciał w innych „układach planetarnych”
 - układ Jowisza
 - gwiazdy wizualnie wielokrotne, zaćmieniowe

→ ruch materii w dziesiątkach

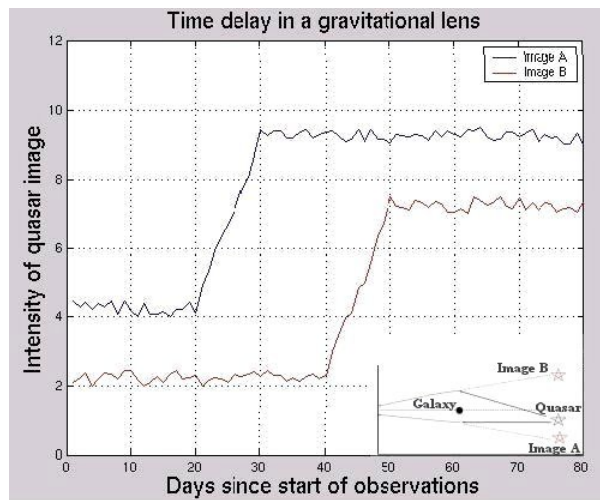
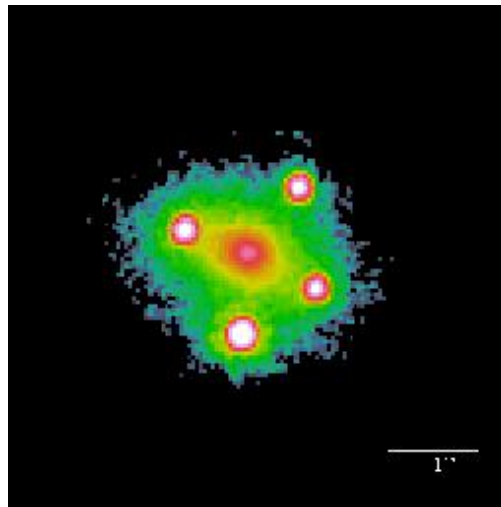
→ ruch obłoków molekularnych wokół jądra (gwiazdy, centrum galaktyki) – np. M 106, NGC 4258



– kolektywne ruchy gwiazd – gromady otwarte (Hiady)

– paralaksa (heliocentryczna)

- kwazary soczewkowane grawitacyjnie – opóźnienie zmian jasności różnych obrazów



- efekt Sunyaeva-Zeldowicha w gromadach galaktyk – oddziaływanie gorącego gazu na promieniowanie mikrofalowe tła –

modyfikacja widma CMB zależy od rozmiaru liniowego gromady

- Świece standardowe

- wyznaczenie jasności absolutnej obiektu i zmierzenie jego jasności widomej

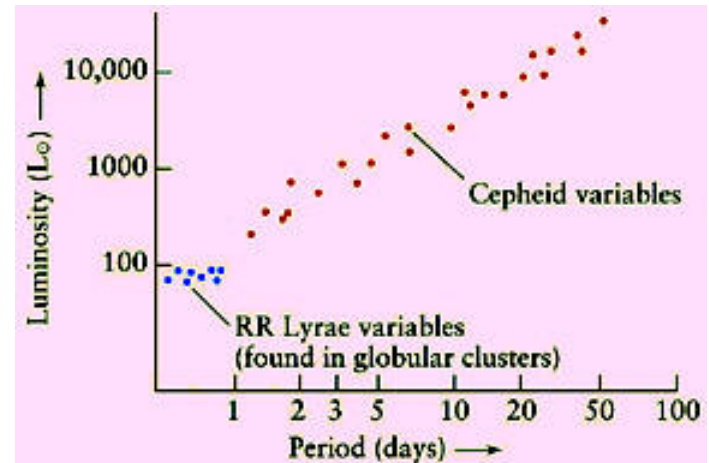
- jasność absolutna M to jasność obiektu jaką miałby w odległości 10 pc

$$M = m - 5 \log_{10} D + 5$$

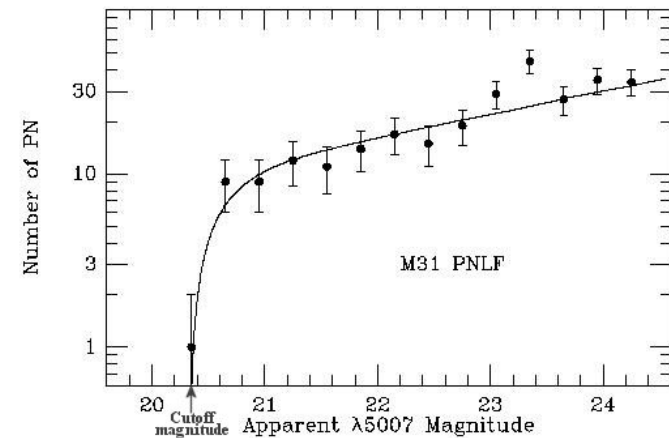
$$D = 10^{\frac{m-M+5}{5}} \simeq 10 \cdot 1.585^{m-M} \text{ pc}$$

- poprawka na ekstynkcję !

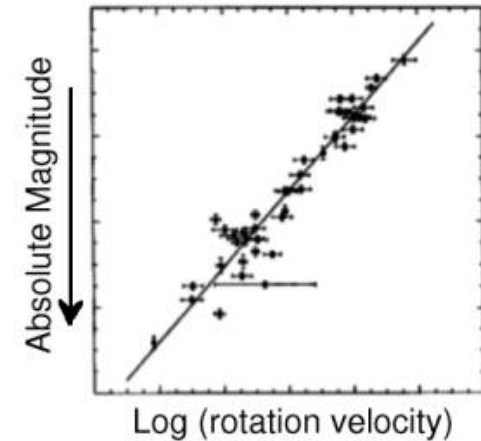
→ cefeidy i gwiazdy typu RR Lyr
– zależność okres-jasność



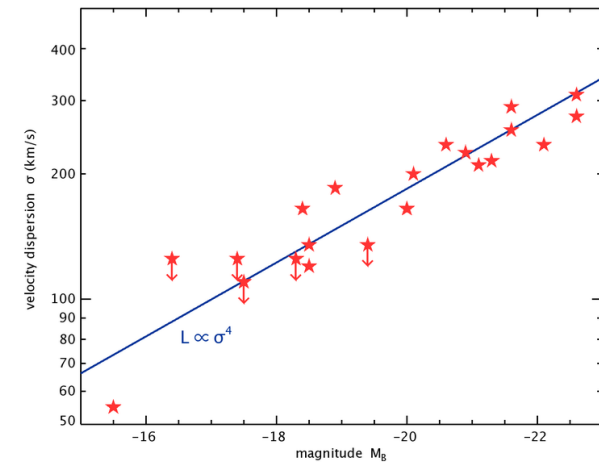
→ funkcja jasności dla mgławic planetarnych – brak mgławic jaśniejszych niż ok. -4^M_5



→ relacja Tully-Fishera – zależność jasności galaktyki spiralnej i jej prędkości rotacji (szerokości lini np. HI)



→ relacja Fabera-Jacksona – zależność jasności galaktyki eliptycznej i dyspersji predkości jej gwiazd



→ gwiazdy nowe – ok. -8^m8 , lub -7^M5 w maksimum, ale ok. -5^M5 15 dni po maksimum

→ gwiazdy supernowe Ia – jasność $-19^M33 \pm 0^M25$ w maksimum

→ dopasowanie różnych gałęzi diagramu H-R dla poszczególnych galaktyk

→ piąta (trzecia) najjaśniejsza galaktyka w gromadzie

→ fale grawitacyjne

(https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_gravitational_wave_observations)

- prawo Hubbla

$$D = H_0 z \quad H_0 \simeq 75 \text{ km/s/Mpc}$$

